



Technisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät

"Gib doch endlich Gas!" - Ausgewählte Beispiele zur Modellierung und Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw im Mathematikunterricht

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister der Naturwissenschaften

im Diplomstudium

LEHRMAT MATHEMATIK UND PHYSIK

Eingereicht von:
Christof Schöffl

Angefertigt am:
Institut für Didaktik der Mathematik

Beurteilung:
A. Univ. Prof. Univ. Doz. Dr. Jürgen Maaß

Mitwirkung:

-

Linz, Februar 2015

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die vorliegende Diplomarbeit ist mit dem elektronisch übermittelten Textdokument identisch.

Linz, Februar 2015

Unterschrift des Autors:.....



Karikatur zum Klimawandel¹



Karikatur zum Thema Kfz-Steuer gemessen nach dem CO₂-Ausstoß eines Pkw²

¹ siehe: <http://www.kfztech.de/kfztechnik/sicherheit/klima/klimadrei.htm>

² siehe: <http://www.darvins-illustrierte.de>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1. Einleitung	4
1.1. Ausblick und Klärung der Lernziele	6
1.2. Warum überhaupt Modellbilden im Mathematikunterricht?	7
1.3. Normen, die den Kraftstoffverbrauch von Fahrzeugen angeben	10
1.4. Motivation und mögliche Einstiege in den Unterricht	10
2. Modelle zur Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw.....	17
2.1. Modell 1: Realer Durchschnittsverbrauch eines Pkw.....	17
2.2. Modell 2: Kraftstoffverbrauch bei konstanter Geschwindigkeit unter Berücksichtigung des Luft- und Rollwiderstandes	27
2.3. Modell 3: Kraftstoffverbrauch bei konstanter Geschwindigkeit unter Berücksichtigung des Motorwirkungsgrades.....	39
2.4. Modell 4: Physik-basiertes Modell für den Kraftstoffverbrauch eines Pkw.....	56
2.4.1. Die Luftwiderstandskraft	58
2.4.2. Die Hangabtriebskraft	60
2.4.3. Die Rollwiderstandskraft.....	65
2.4.4. Die Trägheitskraft.....	69
2.4.5. Elektrische Verlustleistungen eines Pkw	72
2.4.6. Formel für den effektiven Leistungsbedarf	75
2.4.7. Energie und Leistung.....	77
2.4.8. Die Kraftstoffverbrauchsrate	80
3. Beispiele - Untersuchung von Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch	83
4. Kraftstoffverbrauch bei variabler Geschwindigkeit in Stausituationen	92
5. Resümee und Ausblick	109
6. Epilog.....	111

7. Literaturverzeichnis	113
8. Abbildungsverzeichnis	115
9. Tabellenverzeichnis.....	117
10. Anhang.....	118

Vorwort

„Froh zu sein, bedarf es wenig, und wer froh ist, ist ein König..." - August Mühlring

Dieses deutsche Volkslied ist ein sehr kurzer Kanon und sollte deshalb immer und immer wieder gesungen werden...

Ich möchte mich sehr herzlich bei Herrn A. Univ. Prof. Univ. Doz. Dr. *Jürgen Maaß* bedanken, den ich als sehr freundlichen, stets gut gelaunten und äußerst unterhaltsamen Menschen kennen lernen durfte. Sein großes Talent, Menschen für eine Sache zu begeistern, Dinge in ihrem Wesentlichen zu vermitteln und auf den Punkt zu bringen, brachte auch mich immer wieder zum Staunen und sein Gehör und Engagement für meine Arbeit waren immer ein zündender Funke für mein Schaffen. Danke dafür!

Sehr *froh* bin ich auch über meine Eltern, Geschwister und Verwandte, sowie meine Freundin Sophie – liebe Menschen, die mir immer wieder auf die Beine halfen, wenn es einmal nicht so gut voranging. Danke Euch allen und schön, dass es Euch gibt!

Großer Dank gebührt natürlich auch all meinen Studienkollegen und -kolleginnen, mit denen ich durch dick und dünn gehen durfte. Ich werde diese Zeit mit Euch nie vergessen!

1. Einleitung

„Die höchsten Kilometerkosten von allen Wagentypen hat immer noch ein Einkaufswagen im Supermarkt.“ - Lothar Schmidt, deutschsprachiger Schriftsteller und Dramatiker

Von den meisten Mobilfunknetzbetreibern weiß man heutzutage, dass das erste *Smartphone* mit Vertrag sehr günstig (gelegentlich sogar gratis!) zu haben ist. Diese Verkaufsstrategie ist sehr wirksam, wenn es Betreibern von Funknetzen darum geht, Kunden für sich zu gewinnen, indem man sie dazu animiert, eine Geschäftsbeziehung einzugehen und einen Vertrag abzuschließen. In den meisten Fällen wird dabei den „Tarifnebenkosten“ wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Monatliche und jährliche Fixkosten bzw. Servicepauschalentgelte werden regelrecht unter den Tisch gekehrt, die Katze wird im Sack gekauft! Die erste „Handyrechnung“ macht zum ersten Mal das Kleingedruckte auf Prospekten deutlich. Ein Mobiltelefon, welches günstig mit Vertrag erworben wurde, entpuppt sich als einschneidende Kostenfalle! Ähnlich verläuft es bei der



Anschaffung eines Automobils: Man bekommt es [Abbildung 1-1: Tanksäule aus den 1970er Jahren](#) verhältnismäßig günstig, in der Werbung sind nur leere Straßen mit wenig Leuten zu sehen, unter wolkenlosem Himmel erscheint der weißumrandete Asphalt in grünem Glanz. Das geschürte Bedürfnis der Menschen nach Freiheit und Mobilität wird aber nach und nach zur Abhängigkeit, die in die Geldbörse geht. Nach Kaufabschluss eines Neu- oder Gebrauchtwagens kommt allmählich der finanzielle Startschuss: Steuern, Parkplatzgebühren, Vignette, Reparaturen, Waschanlage, ... und: Treibstoffkosten! Dazu kommt, dass zwischen Herstellernormverbrauchsangaben und dem tatsächlichen Kraftstoffverbrauch im Alltag oft Welten liegen. Wie durstig unsere Autos wirklich sein können, zeigen aber schon lange nicht mehr nur Tanksäulen (siehe [Abbildung 1-1¹](#))! Eine eingebaute Momentan-Spritverbrauchsanzeige im Cockpit kann dem/der Lenker/in dabei helfen, den rechten Fuß,

¹ http://www.alte-tanksaeulen.de/marke_aral_d.php

der das Gaspedal bedient, so zu sensibilisieren, dass der Kraftstoffverbrauch sogar sinken kann, ohne dabei Komfort oder Zeit einbüßen zu müssen.

Das persönliche Interesse, den Kraftstoffverbrauch eines Pkw durch eine geschickte Fahrweise zu minimieren, brachte mich zum ersten Mal auf die Idee, einen bewussteren Blick auf den Pkw meiner Eltern zu werfen und mir Gedanken darüber zu machen, aus welchen Einflussfaktoren sich der Verbrauch eines Pkw überhaupt zusammensetzt bzw. welche Fahrweisen sich in welchen Situationen am „spritärmsten“ erweisen. Der Gedanke, auch SchülerInnen und Lehrkräfte für dieses Thema begeistern zu wollen, ist durchaus legitim und wünschenswert, zumal – neben finanziellen Mitteln, die für den Betrieb und die Instandhaltung eines Pkw aufgebracht werden müssen – der massenhafte Betrieb von Verbrennungsmotoren in Autos unweigerlich auch Auswirkungen auf unsere Umwelt hat: Einerseits durch lokale Schadstoffemissionen (Smog, Feinstaub, etc.), die je nach Stand der Technik optimierbar/vermeidbar sind und andererseits durch den systembedingten globalen CO₂-Ausstoß, welcher den natürlichen *Treibhauseffekt* verstärkt und zur Klimaerwärmung beiträgt. Die Relevanz für LehrerInnen und SchülerInnen, sich mit dem Thema "Kraftstoffverbrauch eines Pkw" näher zu beschäftigen, liegt also vorwiegend in den Gesichtspunkten von Wirtschaftlichkeit, Ressourcenschonung, Reduzierung von CO₂-Emissionen und der Reichweite (d.h. der Fahrleistung in Kilometern mit einer Tankfüllung).

Ich möchte mit meiner Arbeit keineswegs das Zeitalter des Automobils verdammen geschweige denn mich mit großen Verfechtern der modernen Automobilindustrie anfeinden. Es geht mir in dieser Arbeit auch nicht darum, den Kraftstoffverbrauch unterschiedlicher Autohersteller zu vergleichen um anschließend Kaufempfehlungen abzugeben. Vielmehr möchte ich hervorheben, dass der Kostenfaktor "Verbrauch" quantifiziert werden kann und nicht einfach nur "hingenommen" werden muss. Darüber hinaus möchte ich viele kleine Anregungen in Form von kurzen Theorie-Inputs sowie zahlreichen, anschaulichen und realitätsnahen Beispielen geben, die helfen können, ein breiteres Bewusstsein bei der Bevölkerung zu schaffen. Ich würde mich sehr darüber freuen, wenn diese Arbeit mit Freude und Spannung gelesen wird und Teile daraus im Schulunterricht Platz finden können.

1.1. Ausblick und Klärung der Lernziele

Überblick:

Der Kraftstoffverbrauch zählt zu den variablen Kosten eines Pkw. Ein niedriger Verbrauch rechnet sich bei jeder Tankfüllung. Übers Jahr gesehen, kann dabei so einiges zusammenkommen. Nebenbei bemerkt kann sich der Verbrauch in Größe und Aufbau ähnlicher Fahrzeuge deutlich unterscheiden. Um ein möglichst gutes Urteil über die Richtigkeit von Herstellerkraftstoffangaben von Pkws fällen zu können, ist es sinnvoll, nach einfachen mathematischen Modellen zu suchen, die diese möglichst genau beschreiben. LehrerInnen und SchülerInnen machen sich gemeinsam auf die Suche nach Einflussfaktoren, die den Kraftstoffverbrauch eines Pkw erhöhen oder sogar senken können. In einem offenen, realitätsnahen Mathematikunterricht mit zunehmendem Komplexitätsgrad und einer kontinuierlichen Verfeinerung der Modellannahmen möchte ich vier unterschiedliche Modelle entwickeln, die den Verbrauch in realen Fahrsituationen simulieren und vorhersagen können. Am Ende werden die SchülerInnen in der Lage sein, theoretische Annahmen und Berechnungen in fahrpraktische Sprit-Spar-Maßnahmen-Tipps umzusetzen und zu diskutieren. Die vorgeschlagenen Tipps sollen dazu dienen, den Kraftstoffverbrauch des eigenen Pkw, der Eltern oder Verwandten durch angepasste Fahrweisen zu verringern und somit die Umwelt sowie den eigenen Geldbeutel zu schonen.

Zielgruppe:

11. und 12. Schulstufe (7. und 8. Klasse Gymnasium)

Zeitraumen:

3-6 Unterrichtseinheiten (je nach Vorkenntnisse und Tiefgang)

Benötigte / Empfohlene Vorkenntnisse:

- Grundlegende Kenntnisse aus der Funktionenlehre (abhängige und unabhängige Variablen, Konstanten, Definitions- und Wertebereiche)
- Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten aufstellen und lösen können
- Grundlegende Kenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Kombinatorik
- Grundlegende Kenntnisse mit Tabellenkalkulation (*Excel* oder *Open Office Calc*)

- Grundlegende Kenntnisse mit *GeoGebra*

Benötigte / Empfohlene Materialien bzw. Software:

- kariertes Papier (evtl. Millimeterpapier), Lineal, Bleistift
- Computer und/oder CAS-fähiger Taschenrechner
- *Microsoft Excel 2007* (oder höher)
- *GeoGebra 4.4* (oder höher)

Viele Diagramme und Abbildungen in dieser Arbeit wurden mit *GeoGebra* angefertigt. Das Programm ist kostenlos und stellt ein äußerst bewährtes Hilfsmittel für die Aufbereitung von Arbeitsblättern und den Mathematikunterricht dar. Das Programm ist sehr umfangreich und bedarf einer gewissen Einarbeitungszeit, die sich spätestens nach den ersten erstellten Anwendungen lohnt! Ich möchte daher allen *GeoGebra*-Interessierten (und all diejenigen, die das noch werden wollen) wärmstens empfehlen, sich mit diesem Programm anzufreunden und zu arbeiten. Sehr hilfreich und weiterführend empfand ich die offizielle *GeoGebra*-Website, die unter <http://geogebra.org> aufzufinden ist und hinter der eine große Community steht, die bei individuellen Fragen sehr schnell weiterhilft.

1.2. Warum überhaupt Modellbilden im Mathematikunterricht?

Mathematische Modelle können uns helfen, mit der Wirklichkeit besser umzugehen. Sie besitzen immer etwas Willkürliches, d.h. sie hängen stark davon ab, welche Annahmen und Regeln für eine bestimmte Situation oder einen bestimmten Sachverhalt getroffen werden. Je nachdem, welche Entscheidungen gefällt werden, können SchülerInnen zu unterschiedlichen Resultaten gelangen. Dies eröffnet einen großen Spielraum für Diskussionen innerhalb der Klasse. Um den Zusammenhang zwischen Realität und Mathematik zu verdeutlichen, kann auf einen sogenannten Modellbildungskreislauf als strategisches Instrument bei der Entwicklung eines theoretischen Modells zurückgegriffen werden. Ausgangspunkt eines solchen Modellbildungskreislaufes stellt immer eine reale Situation oder Problemstellung dar, im konkreten Fall ist dies der tatsächliche Kraftstoffverbrauch eines Pkw.

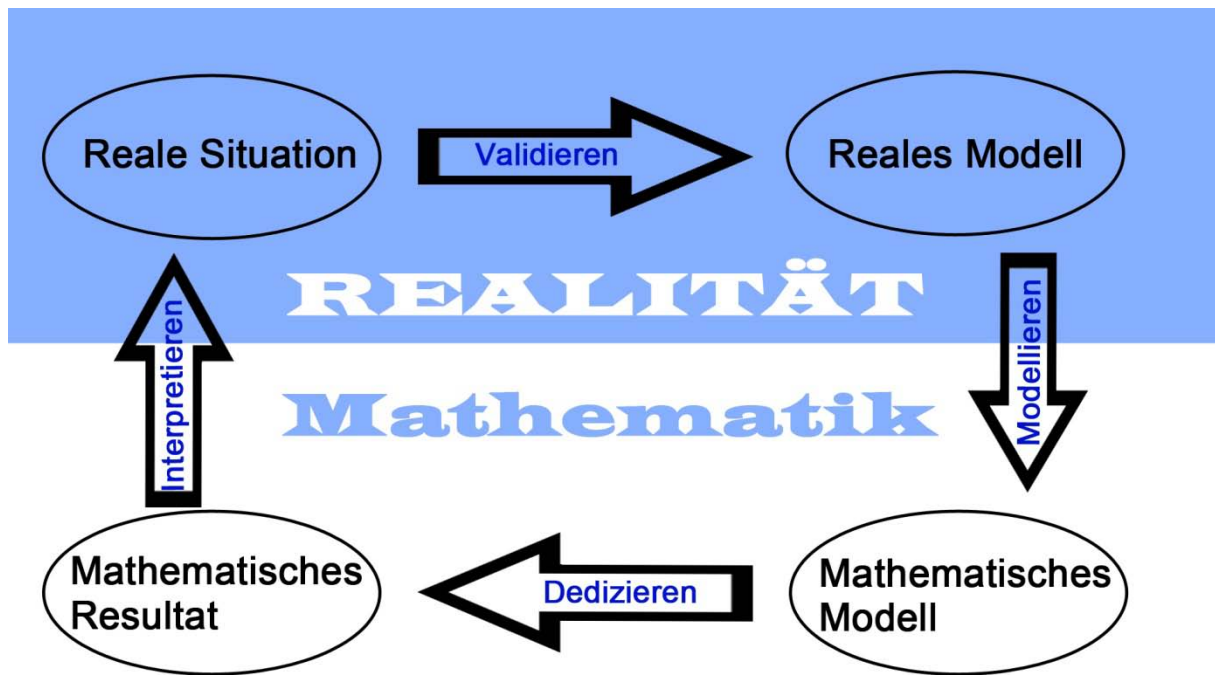


Abbildung 1-2: Modellbildungsprozess²

Die Aufgabenstellung "Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw" ist eine realistische und zudem äußerst komplexe Modellierungsaufgabe. Zur Lösung der Aufgabe sind in besonderem Maße die Kompetenzen *Modellieren*, *Argumentieren*, *Problemlösen* und *Kommunizieren* gefordert. Damit diese Aufgabe von den SchülerInnen erfolgreich bewältigt werden kann, bedarf es einer systematischen Herangehensweise an die Problemstellung:

Validieren: Der Kraftstoffverbrauch eines Pkw zählt zu den *variablen* Betriebskosten eines Autos. Produzenten von Autos sind gesetzlich dazu verpflichtet, Angaben über den Durchschnittsverbrauch eines Fahrzeuges für bestimmte Fahrzyklen zu machen. Viele moderne Autos verfügen zusätzlich über eine Momentanverbrauchsanzeige im Cockpit, die den Fahrer / die Fahrerin über den aktuellen Verbrauch informiert. Warum weichen Real- und Normverbrauch so stark voneinander ab? Welche Einflussfaktoren liegen der Berechnung des Kraftstoffverbrauchs zugrunde?

² in Anlehnung an Greefrath, 2006, S.15

Modellieren: Das Modellieren ist für die SchülerInnen mit Sicherheit der schwierigste Punkt im gesamten Modellbildungsprozess. Es erfordert ein hohes Maß an Wissen, Informationen Geduld und Erfahrung. Je nach gewünschter Intensität können mehr oder weniger Annahmen getroffen werden und Parameter in das Modell einfließen. Ein mathematisches Modell für den Kraftstoffverbrauch eines Pkw sollte u.a. folgende Fragen klären:

- Wie lässt sich der reale Kraftstoffverbrauch mathematisch am besten beschreiben?
- Von welchen Einflussfaktoren hängt er ab?
- Wie ist es überhaupt möglich, Vorhersagen über die Reichweite eines Autos zu treffen?
- Welches mathematische Modell liegt der Momentanverbrauchsanzeige im Cockpit zugrunde?
- Welche Rolle spielen autospezifische Eigenschaften wie Gewicht, Geschwindigkeit, Motorwirkungsgrad eines Autos bzw. äußere Einflüsse wie Fahrbahnbeschaffenheit, Wetterbedingungen, etc. bei der Berechnung des Kraftstoffverbrauchs?
- Welche Normen können den Kraftstoffverbrauch eines Pkw angeben?

Dedizieren: Sobald ein adäquates Modell zur Beschreibung des realen Kraftstoffverbrauchs gewählt wurde, kann damit die Simulation und Behandlung von Beispielen beginnen. An dieser Stelle des Modellbildungsprozesses sind vor allen Dingen mathematisches Geschick, der Umgang mit technischen Hilfsmitteln und das Abschätzen von Parametern die zu verwendenden Kompetenzen.

Interpretieren: Um den Wahrheitsgehalt mathematischer Resultate mit der ursprünglichen, realen Situation überprüfen zu können, bedarf es einer subtilen Interpretation der Ergebnisse (zum Beispiel kann der berechnete Momentanverbrauch eines Fahrzeuges mit dem Wert der Verbrauchsanzeige im Cockpit verglichen werden). Stimmen die mathematischen Resultate mit den realen Beobachtungen in einer bestimmten Situation gut überein, so heißt das noch nicht, dass das Modell für andere Situationen anwendbar ist bzw. ihre Gültigkeit behält. Die Interpretation der Rechenresultate sollte u.a. Antworten auf folgende Fragen liefern:

- Habe ich mich für das richtige Modell entschieden?
- Sind alle Modellannahmen erfüllt?
- Wurden die Parameterwerte richtig abgeschätzt?

Man sieht also, dass es bei der Entstehung einer "neuen" Modelltheorie durchaus notwendig sein kann, den gesamten Modellbildungsprozess mehrmals zu durchlaufen, mit dem Ziel, eine möglichst allgemeingültige Formel für den Kraftstoffverbrauch zu erhalten.

1.3. Normen, die den Kraftstoffverbrauch von Fahrzeugen angeben

Der Durchschnittsverbrauch wird für Pkw meistens in Litern pro 100 km Fahrstrecke [l/100km] angegeben, da er damit leicht mit unterschiedlichen Fahrzeugtypen verglichen werden kann. Man könnte den Kraftstoffverbrauch genauso gut in Litern pro Stunde [l/h] bzw. in Kilogramm pro Stunde [kg/h] angeben, wie es bei Flugzeugen oder Schiffen üblich ist. Jedoch macht man dies in der Regel für Pkw nicht, da es praktisch unmöglich ist, einen Pkw immer mit konstanter Leistung (konstant durchgedrücktes Gaspedal) zu fahren. Für Verbrennungsmotoren (die gängigsten "Kraftwerke" in unseren Autos) ist der *spezifische Kraftstoffverbrauch* in Gramm pro Kilowattstunde [g/kWh] eine weitere wichtige Kenngröße.

Die Ermittlung des Kraftstoffverbrauchs, der Abgas- und CO₂-Emissionen von Pkw in der Europäischen Gemeinschaft erfolgt seit dem 1. Jänner 1996 nach dem standardisierten, neuen Europäischen Fahrzyklus (NEFZ), welcher einen City-Zyklus (städtische Bedingungen) und einen Überland-Zyklus (außerstädtischen Bedingungen) enthält. Wichtig ist, dass der genormte Fahrzyklus dabei ein durchschnittliches Fahrprofil darstellt, welches die Vergleichbarkeit der Messwerte verschiedener Pkw ermöglichen sollte (vgl. Umweltbundesamt, 2013, S. 15).

1.4. Motivation und mögliche Einstiege in den Unterricht

Der Kraftstoffverbrauch eines Pkw war schon seit jeher ein nützliches Beurteilungskriterium für die Effizienz eines Verbrennungsmotors, für die Konzeption und die Entwicklung eines innovativen Antriebsstranges eines Fahrzeuges. Das Thema bietet deshalb für LehrerInnen

und SchülerInnen gute Voraussetzungen, den vollständigen Prozess einer Modellierung (siehe [Abbildung 1-2](#)) zu durchlaufen und reale Sachverhalte in die Mathematik zu übersetzen, im Modell zu arbeiten und schließlich die Ergebnisse in der Situation zu interpretieren. Der realitätsnahe Kontext wird u.a. durch das gesellschaftliche Interesse am dargelegten Thema untermauert. Insbesondere gab es im Laufe der letzten Jahre vermehrt Debatten über globale Klimaschutzziele und Energieressourcen unserer Erde.

In einer siebten oder achten Klasse (11./12. Schulstufe) begegnet man als LehrerIn höchstwahrscheinlich SchülerInnen, die bereits im Besitz eines Autoführerscheins sind. Bei SchülernInnen, wo das nicht der Fall ist, kann man davon ausgehen, dass zumindest die Eltern oder Verwandten einen Führerschein und einen Pkw besitzen. Damit ist der objektive Bezug zum Thema gewährleistet. Zusätzlich können aktuelle Zeitungsartikel zu verkehrsbedingten Umweltbelastungen den nötigen Anreiz bieten, sich mit dem Thema näher auseinanderzusetzen, wie beispielsweise der polarisierende Zeitungsartikel in der „Krone“ (siehe [Abbildung 1-3](#) unten) zeigt.

Aus welchen Gründen auch immer man sich für das Thema "Kraftstoffverbrauch eines Pkw" interessiert, liegt es nahe, den Unterricht fragend-entwickelnd zu beginnen:

"Warum sollte man beim Pkw überhaupt den Kraftstoffverbrauch im Auge behalten?"

Mobilität und Geschwindigkeit prägen unser Leben zusehends. Sie sichern persönliche Freiheit und den Zugang zu den Dienstleistungen für Beruf und Freizeit. Zeigen die SchülerInnen besonderes Interesse am Umweltschutz bzw. am effizienten Umgang mit den fossilen Energiereserven unserer Erde, so liegen die Chancen gut, die Klasse für dieses Thema zu begeistern. Mögliche Einstiege in die Thematik könnten sein:

- Das Interesse der SchülerInnen könnte zum Beispiel mit einer Diskussion über den wachsenden "Energiehunger" und die steigende Lust nach mehr Mobilitätsfreiheit der Menschen geweckt werden. Da die meisten SchülerInnen vermutlich wissen, dass der an den Tankstellen erhältliche Kraftstoff dem Erdöl (dem "schwarzen Gold") entstammt, kann von ihnen leicht geschlossen werden, dass ein sparsamer Umgang mit dieser Ressource auch positive Auswirkungen auf unsere Natur hat: Je mehr Kraftstoff unnötig vergeudet wird, desto mehr wird auch unsere Umwelt belastet.

- Es könnte auch der Einstieg über den Klimawandel erfolgen, da bei Autos mit hohem Kraftstoffverbrauch auch deren CO₂-Emissionen steigen. Eine Reduktion des Kraftstoffverbrauchs würde demnach auch eine Verminderung der CO₂-Emissionen nach sich ziehen und damit Treibhausgase reduzieren.
- Eine weitere Möglichkeit, die Aufmerksamkeit der SchülerInnen auf das Thema "Kraftstoffsparen beim Autofahren" zu lenken, könnte eine Debatte über das Waldsterben aufgrund des zunehmenden Verkehrs darstellen.

"Luft-Hunderter - Das von Autofahrerclubs und AutolenkerInnen unbeliebte Öko-Tempolimit."

Zur Senkung der Stickoxyd-Anteile in der Luft und aus Lärmbelastigungsgründen von Wohnungsbesitzern wurden auf Österreichs Autobahnen zum Teil sogenannte "Luft-Hunderter" (siehe [Abbildung 1-3](#)) eingeführt, die bei häufigen Autobahnnutzern für reges Aufsehen sorgen. Wird man in solchen Zonen zum Beispiel mit 129 anstatt der erlaubten 100 erwischt, so kostet das knapp 150 Euro! Rechtfertigen "Luft-Hunderter" die Forderungen nach weniger Feinstaub in der Luft oder sind sie bloß eine neuerliche Abzocke unter dem Deckmantel des Umweltschutzes? Mit dieser Frage kann in der Klasse eine heiße Diskussion über die Sinnhaftigkeit sowie den Ausbau von weiteren Geschwindigkeitsbeschränkungen auf unseren Straßen gestartet werden. In der „Kronen-Zeitung“ vom 10.12.2014 findet sich u.a. folgender Artikel zum Thema "Luft-Hunderter":



Abbildung 1-3: Artikel in der "Krone" zum Thema "Luft-Hunderter" auf der A1

"Kraftstoffsparen kann helfen, den Geldbeutel zu schonen."

Neben einer Debatte über die Reduktion von Treibhausgasen zur Schonung von Umwelt sowie Mensch- und Tierleben kann natürlich auch der persönliche Geldbeutel in Anbetracht steigender Kraftstoffpreise einen Anreiz dafür bieten, sich mit dem Thema "Kraftstoffverbrauch eines Pkw" auseinanderzusetzen. Je genauer man den Kraftstoffverbrauch seines eigenen Autos kennt, desto besser kann man die Kosten für eine Fahrt damit abschätzen und ggf. mit denen anderer Verkehrsmittel wie etwa Taxi, Bus, Bahn oder Flugzeug vergleichen; und mitunter jede Menge Geld sparen!

"Unglaubwürdige Normverbrauchsangaben von Herstellern."

Die Erfahrung zeigt, dass man den Herstellerangaben bezüglich des Kraftstoffverbrauchs oftmals nur wenig Glauben schenken darf! Der übliche Streckenkraftstoffverbrauch errechnet sich heutzutage nach dem NEFZ (Neuerer Europäischer Fahrzyklus). Wichtig ist zu beachten, dass bei der Anwendung dieses genormten Fahrzyklus Zusatzaggregate, wie zum Beispiel eine Klimaanlage, nicht eingeschaltet sind. Zudem sei angemerkt, dass diese standardisierten Verbrauchsmessungen nur von erfahrenen Autofahrern durchgeführt werden, welche über ein großes, technisches "Know-How" über Autos und Verbrennungsmotoren verfügen. Außerdem haben Fahrten auf präparierten Teststrecken mit alltäglichen Fahrten und Fahrweisen (Ampeln und Staus im Stadtverkehr, hohe Geschwindigkeiten auf Autobahnen, Bergfahrten, etc.) nicht allzu viel gemeinsam. Man sollte sich dessen bewusst sein, dass solche, zum Teil recht irreführenden Verbrauchsangaben, ausschließlich den Zweck der theoretischen Vergleichbarkeit mit anderen Fahrzeugtypen verfolgen und nicht den realen Endverbrauch, wie er sich im Alltag u.a. an der Tankstelle erweist, beschreiben.

Für sogenannte *Hybridfahrzeuge* sind die Differenzen zwischen theoretischem und realem Verbrauch besonders "problematisch". Derartige Fahrzeuge verfügen im Wesentlichen über zwei Antriebsstränge: Bei Fahrten im Stadtverkehr sorgt ein Elektromotor für den nötigen Vortrieb, der mit elektrischer Energie aus einer "wiederaufladbaren Batterie", sogenannten *Akkumulatoren*, versorgt wird. Beim schnellen Fahren auf Autobahnen oder Landstraßen schaltet sich ein herkömmlicher Verbrennungsmotor hinzu, der seine Energie aus dem Benzintank schöpft. Von knapp über zwei Litern Treibstoff für eine Strecke von 100 Kilometern ist die Rede, wenn man Flugblätter von Hybridfahrzeug-Herstellern durchforstet. So darf sich beispielsweise ein Besitzer des Hybrid-Modells *Prius* von *Toyota* über einen Verbrauch von lediglich 2,1 Liter/100 km freuen (vgl. Deutsche Autozeitung³, 2014).

Der Fahrzyklus in seiner aktuellen Form steht daher in der Kritik, nicht dem realen Nutzungsprofil von Pkw zu entsprechen. Möglicherweise ist die Berechnungsmethode für den Verbrauch derartiger Fahrzeuge grundsätzlich zu hinterfragen. Irreführenderweise wird (noch immer) nur der absolute Kraftstoffverbrauch aus dem Tank für die Berechnung herangezogen und etwaige benötigte elektrische Fahrenergie außen vorgelassen. So

³ <http://www.autozeitung.de/auto-fahrbericht/toyota-prius-2012/Verbrauch/n396428/2?panorama=1#>

verbraucht etwa ein Elektroauto, das zu 100% mit elektrischer Energie versorgt wird, nach dem aktuellen NEFZ null Liter Treibstoff! Insbesondere verfälschen elektrobetriebene Fahrzeuge, die mit elektrischer Energie aus Kohlekraftwerken "getankt" werden, die CO₂-Bilanz erheblich! Die Aufgabe eines in der Schule durchgeführten Projektunterrichts könnte beispielsweise darin bestehen, ein aussagekräftiges Verbrauchsmodell für Hybrid- und Elektrofahrzeuge zu entwickeln und auszuarbeiten, indem zum Beispiel auch die Kosten für die Her- und Bereitstellung elektrischer Energie für das Fahren mit elektrobetriebenen Fahrzeugen berücksichtigt werden.

"Welche Maßnahmen kann man als Einzelner setzen, um den Kraftstoffverbrauch seines Pkw zu senken?"

Vielleicht hat sich der eine oder die andere SchülerIn schon einmal Gedanken darüber gemacht, welche Faktoren bei der Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw eine Rolle spielen. SchülerInnen, die bereits einen Führerschein besitzen, haben höchstwahrscheinlich in der Fahrschule schon Tipps für einen kraftstoffsparenden Umgang mit ihrem Auto erfahren. Deshalb sollte im nächsten Schritt den SchülerInnen die Möglichkeit geboten werden, in Kleingruppen zu beraten, welche Fahrweisen und Parameter den Kraftstoffverbrauch senken oder erhöhen können. Im Anschluss daran können die Ergebnisse an der Tafel gesammelt und diskutiert werden. Dabei geht es noch keineswegs darum, die Argumente auf ihre Richtigkeit zu prüfen, sondern lediglich darum, das Interesse der SchülerInnen an dem Thema "Kraftstoffverbrauch eines Pkw" zu wecken. Schlussfolgerungen der SchülerInnen könnten etwa sein:

- Benzinmotoren verbrauchen aufgrund ihrer Bauart mehr Kraftstoff als Dieselmotoren.
- Kleinere, kompaktere Autos verbrauchen aufgrund des geringeren Luft- und Rollwiderstandes weniger Kraftstoff.
- Elektrische Geräte (Servolenkung, Sitzheizung, Klimaanlage, Heckscheibenheizung, etc.) erhöhen den Kraftstoffverbrauch.
- Vorausschauendes Fahren senkt den Kraftstoffverbrauch.
- Schnelles Fahren verkürzt die Motorlaufzeit und man spart damit Kraftstoff.

- Schnelles Hochschalten auf den höchsten Gang vermindert den Kraftstoffverbrauch.
- Autos mit großer Masse brauchen mehr Kraftstoff.
- Autofahren mit halbem Tank spart Kraftstoff.
- Motoren mit vielen Zylindern verbrauchen mehr Kraftstoff als solche mit wenigen.
- In der Stadt und auf Landstraßen verbraucht man aufgrund der verminderten, erlaubten Höchstgeschwindigkeit weniger Kraftstoff.
- Sportwagen verbrauchen sehr viel Kraftstoff.
- ...

Derartige, den Kraftstoffverbrauch eines Pkw betreffende Aussagen, können dazu dienen, eine rege Diskussion über das Thema innerhalb der Klasse zu entfachen. Im nächsten Schritt des Unterrichts werden vier unterschiedliche Modelle entwickelt, die eine Hilfe bei der Beantwortung obiger Fragen darstellen können.

2. Modelle zur Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw

In den folgenden vier Unterkapiteln möchte ich den Faktoren, welche den Kraftstoffverbrauch eines Pkw beeinflussen, näher auf den Grund gehen und in den Unterrichtsgängen verschiedene Modelle entwickeln, die den Kraftstoffverbrauch eines Pkw beschreiben können.

2.1. Modell 1: Realer Durchschnittsverbrauch eines Pkw

Vorgeschlagener Unterrichtsgang

A) Aufgabenstellung

Die SchülerInnen erhalten die Aufgabe, den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch ihres Pkw oder dem der Eltern zu berechnen. Sie entwickeln ein einfaches Modell, das den Durchschnittsverbrauch pro gefahrene Strecke angibt und vergleichen ihn mit dem Normverbrauch von Herstellern und dem anderer Fahrzeugtypen.

B) Material und Informationen sammeln

Zur Feststellung des realen Durchschnittsverbrauchs eines Pkw empfiehlt es sich, ein sogenanntes *Tank-Fahrtenbuch* anzulegen (siehe Anhang!). In einem solchen *Fahrtenbuch* wird durch das regelmäßige Notieren des Gesamtkilometerstandes, der Füllmenge an Kraftstoff und des dafür bezahlten Gesamtpreises das reale Tankverhalten dokumentiert, aus dem man auf den Durchschnittsverbrauch schließen kann. Zudem erhält man einen guten Überblick über die Preisentwicklung des getankten Kraftstoffes über den geführten Zeitraum hinweg. SchülerInnen können bereits in den Ferien damit beginnen, Tankstellenaufenthalte in einem *Fahrtenbuch* festzuhalten. Je mehr Einträge das *Fahrtenbuch* am Ende aufweist, desto genauer ist das Ergebnis! Die wesentlichen Vorteile eines *Fahrtenbuches* sind:

- Überblick über monatliche/jährliche Betriebskosten für den Pkw
- Preisentwicklung des verwendeten Kraftstoffes

- bei täglichen Fahrten der gleichen Strecke (z.B. in die Schule): Kostenabschätzung für eine/zwei/drei/vier/.../hundert Fahrten mit dem Auto
- Gute Vergleichbarkeit des realen Kraftstoffverbrauches mit anderen Fahrzeugtypen
- Ermittlung des realen Kraftstoffverbrauchs als Entscheidungskriterium für einen Autokauf

C) Mathematisierung und Modellbildung

Mathematisches Modell I: Mittlerer Verbrauch eines PKW

Wie lässt sich der Durchschnittsverbrauch eines PKW im einfachsten Fall feststellen?

Falls die SchülerInnen bereits Einträge in ihr *Fahrtenbuch* getätigt haben, können diese jetzt verwendet werden. Alternativ kann man unter www.spritmonitor.de auf Aufzeichnungen des Tankverhaltens von anonymen AutofahrernInnen zurückgreifen. Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich mich auf die Aufzeichnungen beziehen, die während meiner Untersuchungen zum Thema "*Kraftstoffverbrauch eines Familien-Pkw*" entstanden sind. Dazu habe ich für einen Familien-Pkw (ein *Nissan Micra*, nähere Informationen siehe **Tabelle 2-1** unten) ein *Fahrtenbuch* über einen Zeitraum von knapp zwei Jahren angelegt. Für die Auswertung benötigen die SchülerInnen einen Computer mit einer Tabellenkalkulationssoftware.

DATENBLATT

Zulassungsdatum: 02.08.2012

Klasse / Fahrzeugart: Personenkraftwagen

Marke: Nissan

Handelsbezeichnung: Nissan Micra

Farbe: blau

Eigengewicht: 983 kg

Höchstes zulässiges Gesamtgewicht: 1425 kg

Antriebsart: Benzin

Hubraum: 1198 ccm

Höchstgeschwindigkeit: 170 km/h

Leistung: 59 kW (ca. 80 PS) bei 6000 U/min

Standgeräusch: 76 dBA bei 3750 U/min

Kraftstoffverbrauch gesamt: 5 l/100 km

CO₂: 115 g/km

Tabelle 2-1: Entnommene Daten aus der Zulassungsbescheinigung des Familien-Pkw

Für die Aufzeichnungen legen die SchülerInnen im Programm *Office Excel* von *Microsoft* eine Tabelle mit den Rubriken *Datum*, *Gesamtkilometer*, *Tageskilometer*, *Füllmenge*, *Preis/Liter*, *Gesamtpreis* und *Verbrauch* an und tragen die Zahlen aus dem Fahrtenbuch in die jeweiligen Zeilen und Spalten ein. Die Tageskilometer ergeben sich aus der jeweiligen Differenz der Gesamtkilometer. Ich berechne sie zeilenweise mit der Eingabe = $\$B3 - \$B2$ im Feld C3 und ziehe mit dem Cursor die rechte untere Ecke des Eingabefeldes bis ganz nach unten, um die Formel für alle Einträge in der Spalte *Gesamtkilometer* anzuwenden. Das gleiche "Verfahren" wende ich an, um die Spalte *Preis/Liter* (Eingabe im Feld E2: = $\$F2/\$D2$) zu füllen. Die Spalte G für den *Verbrauch* bleibt vorerst noch leer. Die neue Tabelle sollte dann in etwa so aussehen:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Datum	Gesamtkilometer [km]	Tageskilometer [km]	Füllmenge [l]	Preis/Liter [€]	Gesamtpreis [€]	Verbrauch [l/100 km]
2	03.08.2012	82	82	40,01	1,499	59,97	
3	15.08.2012	707	625	33,38	1,499	50,04	
4	26.08.2012	1209	502	34,50	1,544	53,27	
5	05.09.2012	1770	561	35,00	1,549	54,22	
6	21.09.2012	2319	549	36,00	1,504	54,14	
7	28.09.2012	2664	345	21,17	1,484	31,42	
8	01.10.2012	3217	553	32,00	1,524	48,77	
9	12.10.2012	3757	540	36,00	1,504	54,14	
10	29.10.2012	4285	528	35,00	1,419	49,67	
11	11.11.2012	4835	550	36,00	1,399	50,36	
12	23.11.2012	5486	651	34,00	1,409	47,91	
13	04.12.2012	5821	335	30,00	1,359	40,77	
14	12.12.2012	6332	511	33,10	1,379	45,64	
15	22.12.2012	6823	491	34,00	1,394	47,40	
16	06.01.2013	7385	562	37,00	1,399	51,76	
17	21.01.2013	7878	493	34,00	1,399	47,57	
18	30.01.2013	8415	537	34,31	1,399	48,00	
19	13.02.2013	8925	510	34,00	1,454	49,44	
20	02.03.2013	9477	552	37,00	1,394	51,58	

21	21.03.2013	10041	564	35,00	1,394	48,79	
22	10.04.2013	10584	543	36,00	1,409	50,72	
23	27.04.2013	10932	348	23,00	1,369	31,49	
24	27.04.2013	11486	554	36,00	1,369	49,28	
25	16.05.2013	12052	566	18,55	1,369	25,39	
26	01.06.2013	12450	398	35,50	1,389	49,31	
27	27.06.2013	12881	431	35,00	1,369	47,92	
28	21.07.2013	13455	574	36,00	1,429	51,44	
29	15.08.2013	14075	620	39,71	1,399	55,55	
30	01.09.2013	14741	666	36,00	1,393	50,15	
31	24.09.2013	15304	563	35,30	1,379	48,68	
32	12.10.2013	15836	532	34,00	1,374	46,72	
33	25.10.2013	16408	572	36,00	1,369	49,28	
34	04.11.2013	16874	466	33,53	1,342	45,00	
35	19.11.2013	17464	590	36,33	1,349	49,01	
36	02.12.2013	18030	566	34,00	1,327	45,12	
37	15.12.2013	18570	540	34,80	1,349	46,95	
38	27.12.2013	19195	625	35,91	1,419	50,96	
39	15.01.2014	19700	505	33,00	1,348	44,48	
40	30.01.2014	20200	500	32,90	1,369	45,04	
41	28.02.2014	20523	323	33,00	1,339	44,19	
42	15.03.2014	21058	535	35,00	1,359	47,57	
43	13.04.2014	21553	495	32,00	1,375	44,00	
44	30.04.2014	22110	557	36,00	1,384	49,82	
45	21.05.2014	22644	534	35,01	1,383	48,42	
46	06.06.2014	22957	313	21,01	1,342	28,20	
47	19.06.2014	23420	463	28,00	1,395	39,06	

Tabelle 2-2: Einträge aus dem Fahrtenbuch für das Auto Nissan Micra

Wie aus der **Tabelle 2-2** entnommen werden kann, sind im Zeitraum vom 3. August 2012 bis zum 19. Juni 2014 mit dem Pkw 23420 – 82 = 23338 km gefahren und dabei insgesamt $SUMME(D3:D47) = 33,38 + 34,50 + \dots = 1503,1$ Liter Benzin getankt/verbraucht worden (die erste Tankfüllung kann ignoriert werden, da die zuvor gefahrene Wegstrecke unbekannt ist). Um eine Formel für den Benzinverbrauch aufstellen zu können, müssen die folgenden zwei Beziehungen in die Überlegungen einbezogen werden, die unserer Erfahrung entspringen:

- *Je mehr Liter Benzin ich für eine bestimmte Strecke benötige, desto höher ist der Benzinverbrauch -> benötigte Liter Benzin ~ Benzinverbrauch*

- Je mehr Kilometer ich mit einem vollgefüllten Tank fahren kann, desto geringer ist der Benzinverbrauch -> zurückgelegte Strecke $\sim 1/\text{Benzinverbrauch}$

Man erkennt also, dass zwischen *Benzinverbrauch* und *benötigten Litern Benzin* ein linear proportionaler und zwischen *Benzinverbrauch* und *zurückgelegter Strecke* ein indirekt proportionaler Zusammenhang besteht. Eine kurze Schlussrechnung zeigt, wie man aus der zurückgelegten Gesamtstrecke und den dafür benötigten Litern Benzin auf den durchschnittlichen Benzinverbrauch kommen kann:

Zurückgelegte Strecke	Benötigter Benzin
23338 km	1503,01 l
1 km	1503,01 l / 23338 km = 0,0644 l/km
10 km	0,0644 l/km * 10 km = 0,6440 l
100 km	0,0644 l/km * 100 km = 6,44 l

Tabelle 2-3: Berechnung des Durchschnittsverbrauchs mit Hilfe einer Schlussrechnung

Der *Nissan Micra* verbraucht also im Durchschnitt 6,44 Liter Benzin auf 100 km Fahrstrecke. Das sind um $\left(\frac{6,44}{5} - 1\right) * 100 = \mathbf{28,8\%}$ mehr, als der Hersteller angibt! Die allgemeine Formel für den Kraftstoffverbrauch $B(s)$ für die zurückgelegte Wegstrecke s lautet daher:

$$B(s) = \frac{6,44}{100} * s = 0,0644 * s$$

□

Wie die nachfolgende Darstellung zeigt, hätte man auch durch eine andere Möglichkeit auf den Durchschnittsverbrauch kommen können, indem man z.B. den benötigten Benzin über den zurückgelegten Weg aufträgt. In diesem Fall erhält man *stückweise lineare Funktionen*, deren Steigungen den Verbrauch nach jeder Tankfüllung wiedergeben. Zum Auffüllen der leeren Spalte *Verbrauch* in [Tabelle 2-2](#) geht man am besten wie folgt vor: Im Feld G3 (Warum macht G2 hier keinen Sinn?) wird die Berechnungsformel $= \frac{\$D3}{\$C3} * 100$ eingegeben und mit dem Cursor nach unten gezogen. Dieses Mal kann es für die SchülerInnen hilfreich sein, ein Diagramm zu erstellen, wobei die zurückgelegte Wegstrecke (Gesamtkilometer) auf der x-Achse und der "aufsummierte" Benzinverbrauch auf der y-Achse gewählt werden sollen:

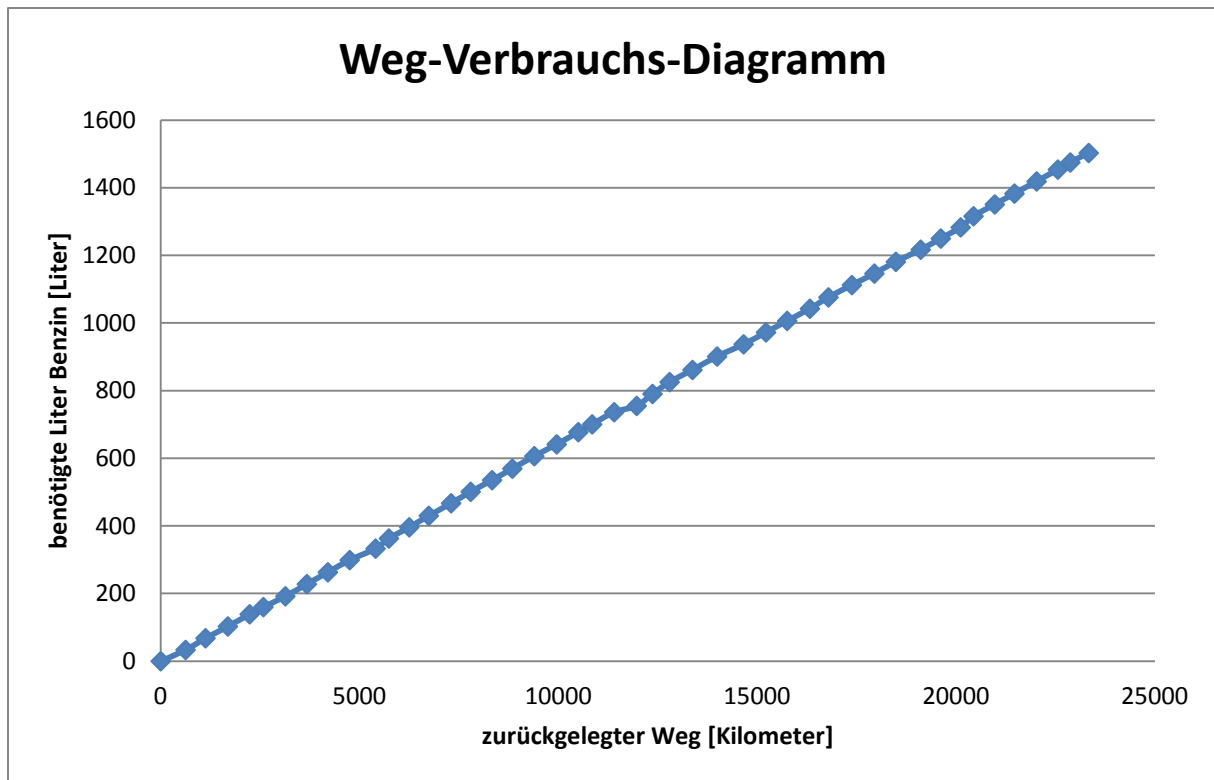


Abbildung 2-1: Weg-Verbrauchs-Diagramm dargestellt mit stückweisen linearen Funktionen

Das Ziel ist es, eine Durchschnittsgerade (mittels *linearer Interpolation*) zu ermitteln, deren Steigung dann dem Benzinverbrauch pro gefahrenen Kilometer Fahrstrecke entspricht. Die lineare Interpolation kann ebenfalls leicht mit *Office Excel* durchgeführt werden. Das Programm zeichnet in das Diagramm eine schwarze Trennlinie ein und gibt auch gleich deren Funktionsgleichung aus:

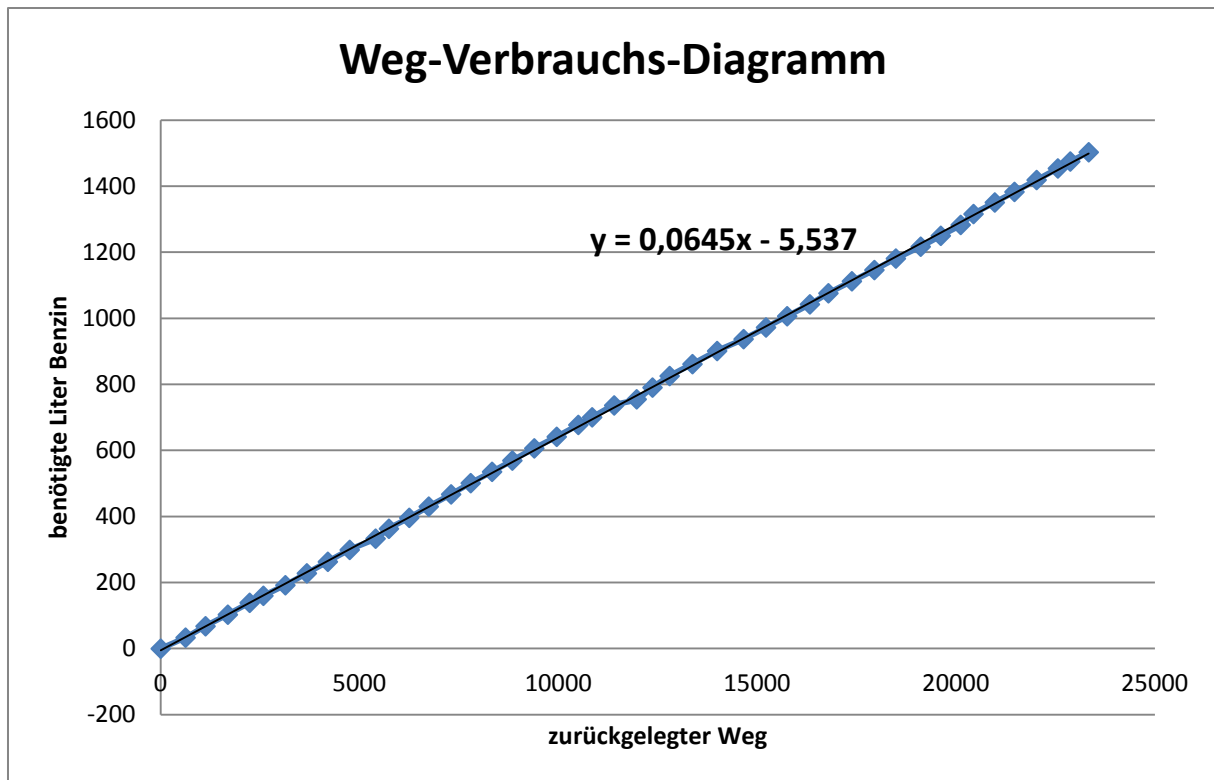


Abbildung 2-2: Weg-Verbrauchs-Diagramm mit eingezeichneter Regressionsgerade

Die Funktionsgleichung lautet: $y = 0,0645x - 5,537$

Daraus erhält man für die Steigung: $k = 0,0645$

Diese k entspricht dem Benzinverbrauch in Litern pro gefahrenem Kilometer Fahrstrecke. Multipliziert man k mit 100, so erhält man den Benzinverbrauch in l/100 km. Er ist in etwa gleich groß wie der Durchschnittswert von oben, nämlich $0,0645 \cdot 100 = \mathbf{6,45 \text{ l/100 km}}$.

□

Bemerkung: Für die Werte aus [Tabelle 2-2](#) wurde in obigem Beispiel der Durchschnittswert für den Verbrauch berechnet. Können aus den gesammelten Daten auch Aussagen über Maximal- bzw. Minimalverbrauch des *Nissan Micra* getroffen werden? Die Antwort lautet: Ja! Allerdings hängen diese Werte stark davon ab, ob bei den aufgezeichneten Tankvorgängen "vollgetankt" wurde oder nicht. Deshalb sind diese Werte mit Vorsicht zu genießen! Zur Veranschaulichung trägt man die "Teilverbrauchs"-Werte (Spalte G in [Tabelle 2-2](#)) diesmal in Abhängigkeit von der zurückgelegten Gesamtstrecke in ein Diagramm ein:

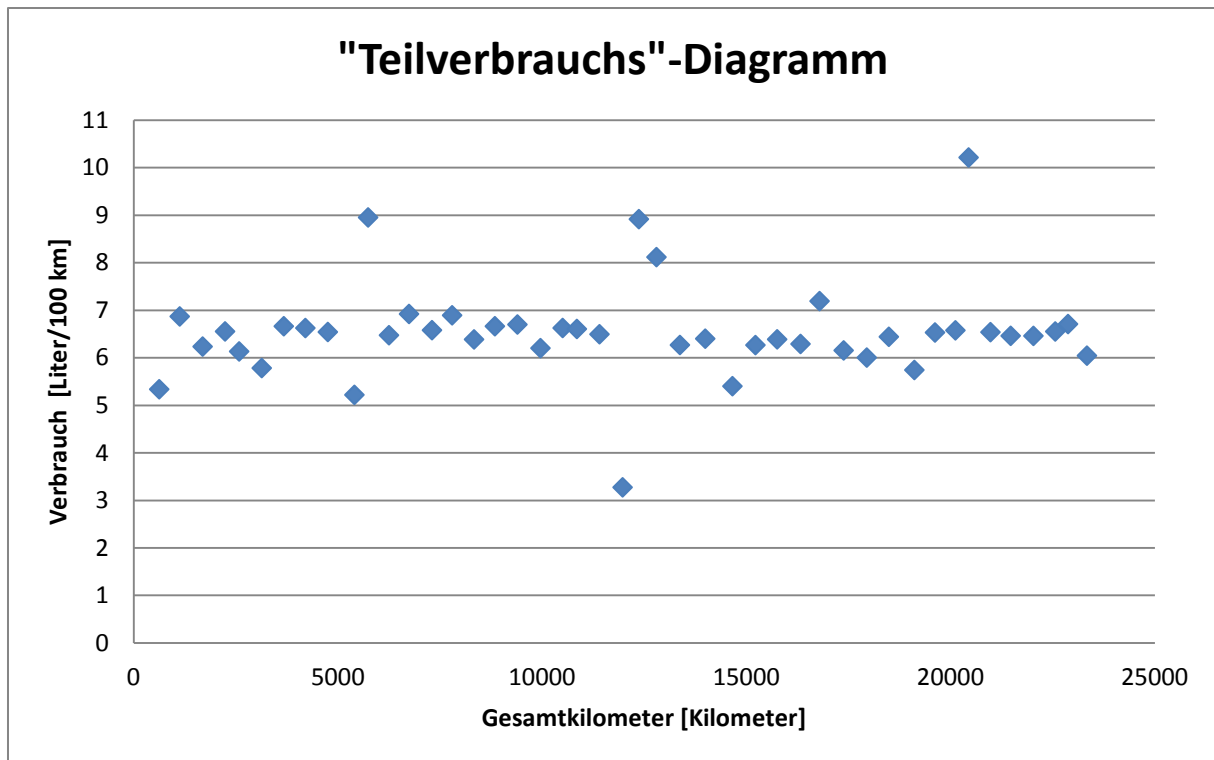


Abbildung 2-3: "Teilverbrauchs"-Diagramm zur Ermittlung des Maximal- und Minimalverbrauchs

Aus **Abbildung 2-3** ist ersichtlich, dass der Maximalverbrauch des *Nissan Micra* bei etwa 10,2 l/100 km und der Minimalverbrauch bei etwa 3,3 l/100 km liegen muss. Zur Kontrolle können die exakten Werte für das Maximum und Minimum mit den beiden, in *Excel* integrierten Funktionen = *MAX*(G3: G47) und = *MIN*(G3: G47) berechnet werden. Man erhält:

Maximum = 10,22 l/100 km

Minimum = 3,28 l/100 km

□

Weiterführendes Beispiel: Laut einer Statistik des Verkehrsclubs Österreich (kurz VCÖ) aus dem Jahre 2012 fahren ÖsterreicherInnen täglich 36 km mit dem Auto. Dabei verbraucht er/sie täglich rund 2,5 Liter Treibstoff (vgl. Die Presse⁴, 2012).

Familie Schöffl führt daraufhin über einen Zeitraum von knapp zwei Jahren ein Fahrtenbuch (siehe **Tabelle 2-2**). Diskutiere und beantworte folgende Fragen:

⁴ http://diepresse.com/home/panorama/oesterreich/733547/VCOSTatistik_Oesterreicher-fahren-taeglich-36-Kilometer

- a) Wie viele Kilometer fährt Familie Schöffl im Durchschnitt täglich/monatlich/jährlich mit dem Auto?
- b) Wie viele Liter Benzin verbraucht sie dabei täglich/monatlich/jährlich?
- c) Sind die Werte aus a) und b) mit den Durchschnittswerten eines/r typischen Österreichers/in verträglich? Vergleiche sie dazu mit der Aussage aus der Presse!
- d) Wie hoch sind die Betriebskosten (nur Benzinkosten!) der Familie Schöffl pro Tag/Monat/Jahr?

Lösungsvorschlag:

Zum Lösen dieser Aufgaben können wieder **Tabelle 2-2** und das Computerprogramm *Excel* herangezogen werden:

zu a): Aus **Tabelle 2-2** kann die zurückgelegte Gesamtstrecke für den Zeitraum vom 3.8.2012 bis zum 19.6.2014 hergeleitet werden. Sie beträgt $23420 - 82 = 23338$ km. Der betrachtete Zeitraum entspricht genau $28 + 30 + 31 + 30 + 31 + 365 + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 19 = 685$ Tage. Dies bedeutet, dass Familie Schöffl im Schnitt eine Strecke von

$$\frac{23338 \text{ km}}{685} \approx 34,07 \text{ km täglich,}$$

$$34,07 \text{ km} * 30 \approx 1022,10 \text{ km monatlich und}$$

$$34,07 \text{ km} * 365 \approx 12435,58 \text{ km jährlich}$$

mit dem Auto zurücklegt.

zu b): Familie Schöffl tankt/verbraucht im Zeitraum vom 3.8.2012 bis zum 19.6.2014 $SUMME(D3:D47) = 1503,1$ Liter Benzin. Das sind

$$\frac{1503,1 \text{ Liter}}{685} \approx 2,19 \text{ Liter täglich,}$$

$$2,19 \text{ Liter} * 30 \approx 65,83 \text{ Liter monatlich und}$$

$$2,19 \text{ Liter} * 365 \approx 800,92 \text{ Liter jährlich.}$$

zu c): Familie Schöffl fährt im Schnitt um zwei Kilometer/Tag weniger als der/die DurchschnittsösterreicherIn. Deshalb verbraucht sie auch rund 0,3 Liter/Tag weniger Benzin.

Herr und Frau Österreicher fährt im Schnitt ein Auto mit einem Durchschnittsverbrauch von

$\frac{2,5 \text{ Liter}}{36 \text{ km}} * 100 \approx 6,94 \frac{\text{Liter}}{100 \text{ km}}$, während hingegen Familie Schöffls Wagen im Schnitt (vgl. Rechnung oben, blauer Kasten) lediglich $6,44 \frac{\text{Liter}}{100 \text{ km}}$ Benzin verbraucht. Der Wagen von Familie Schöffl ist also um etwa einen halben Liter pro 100 km Fahrstrecke sparsamer als der österreichische Durchschnittswagen.

zu d): Familie Schöffl bezahlte vom 3.8.2012 bis zum 19.6.2014 $SUMME(F3:F47) = 2108,64 \text{ €}$ für das Tanken von Benzin. Damit betragen die Durchschnittskosten für Benzin

$$\frac{2108,64 \text{ €}}{685} \approx 3,08 \text{ € täglich,}$$

$$3,08 \text{ €} * 30 \approx 92,35 \text{ € monatlich und}$$

$$3,08 \text{ €} * 365 \approx 1123,58 \text{ € jährlich.}$$

□

D) Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Die Führung eines *Fahrtenbuches* zur Dokumentation des realen Kraftstoffverbrauchs eines Pkw kann sehr hilfreich bei der Sammlung von Daten sein. Bereits nach wenigen Einträgen (3-5 Tankfüllungen genügen!) lassen sich gute Näherungen für den Durchschnittsverbrauch berechnen und graphisch darstellen. Ein weiterer großer Vorteil dieser Untersuchung liegt im selbständigen Arbeiten der SchülerInnen an den zu lösenden Arbeitsaufträgen. Das Interesse und die damit verbundene Arbeitsintensität jedes/er einzelnen Schülers/in werden zusätzlich durch das abschließende "Ranking" um das "sparsamste" Auto „angeheizt“.

Mit Hilfe dieses ersten Modells wurde deutlich, dass der *Nissan Micra* im Mittel 6,44 Liter Benzin pro 100 Kilometer Fahrstrecke benötigt. Laut dem technischen Datenblatt (siehe [Tabelle 2-1](#)) sollte er allerdings lediglich 5,0 Liter/100 km durchschnittlich benötigen! SchülerInnen werden auf ähnliche Ergebnisse stoßen! Damit ist der Weg für eine tiefergreifende Diskussion und eine weiterführende Behandlung des Themas geebnet. Ist obige Rechnung falsch? Oder sind die Modellannahmen noch etwas zu allgemein? Macht es einen Unterschied, ob ich mit dem Auto auf der Landstraße oder vermehrt in der Stadt unterwegs bin? Wie ist es auf der Autobahn? Spielt vielleicht die Geschwindigkeit eine Rolle?

Und wenn ja, welch große? Um Antworten auf diese Fragen werde ich mich im nächsten Unterkapitel bemühen.



2.2. Modell 2: Kraftstoffverbrauch bei konstanter Geschwindigkeit unter Berücksichtigung des Luft- und Rollwiderstandes

Im vorherigen Kapitel wurde von den SchülerInnen eine empirische Formel für den benötigten Kraftstoff $B(s)$ pro zurückgelegter Fahrstrecke s hergeleitet und damit eine erste Berechnungsvorschrift für den Durchschnittsverbrauch eines Pkw gefunden. Ich werde nun versuchen, das Modell weiterzuentwickeln, indem ich auch die Zeit und damit die Geschwindigkeit in der Verbrauchstheorie berücksichtige.

A) Einstieg in den Unterricht

In Anlehnung an die Ausarbeitung eines Vortrags an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich zum Thema "Benzinverbrauch" (vgl. Kirchgraber, 1994, S. 9 ff) erhalten die SchülerInnen als Einstieg ein Verbrauchsdiagramm (siehe [Abbildung 2-4](#) unten). Derartige Diagramme findet man sehr leicht im Internet (z.B. mit *Google*-Suche, Stichwort *Verbrauchsdiagramm*). Alternativ kann man als LehrerIn die SchülerInnen auf die Messgeräte in modernen Autos hinweisen, die den momentanen Verbrauch angeben. Mit Hilfe solcher Anzeigen, eines einstellbaren Tempomaten und einem zuverlässigen Fahrer können so auch individuelle Verbrauchsdiagramme von den SchülerInnen erstellt werden. Es lässt sich zum Beispiel eine Tabelle mit den Rubriken *Gang*, *Geschwindigkeit* und *momentaner Verbrauch* anlegen. Falls die SchülerInnen einen Zugang zu Autos mit einer Momentan-Verbrauchsanzeige haben, so können derartige Messungen an möglichst windstillen und verkehrsrühigen Tagen auf ebenen Autobahnen oder Freilandstraßen durchgeführt werden und die auf diese Weise ermittelten Messwerte für die weitere Berechnung des Kraftstoffverbrauchs verwendet werden!

Als Musterbeispiel habe ich bereits ein vollständiges Verbrauchsdiagramm aus dem Internet⁵ aufbereitet. Es zeigt für sechs unterschiedliche Gänge eines *Golf 1,4 TSI* mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur jeweils eine Verbrauchskurve an. Der Kraftstoffverbrauch ist für eine Strecke von 100 km bei konstanter Geschwindigkeit v angegeben:

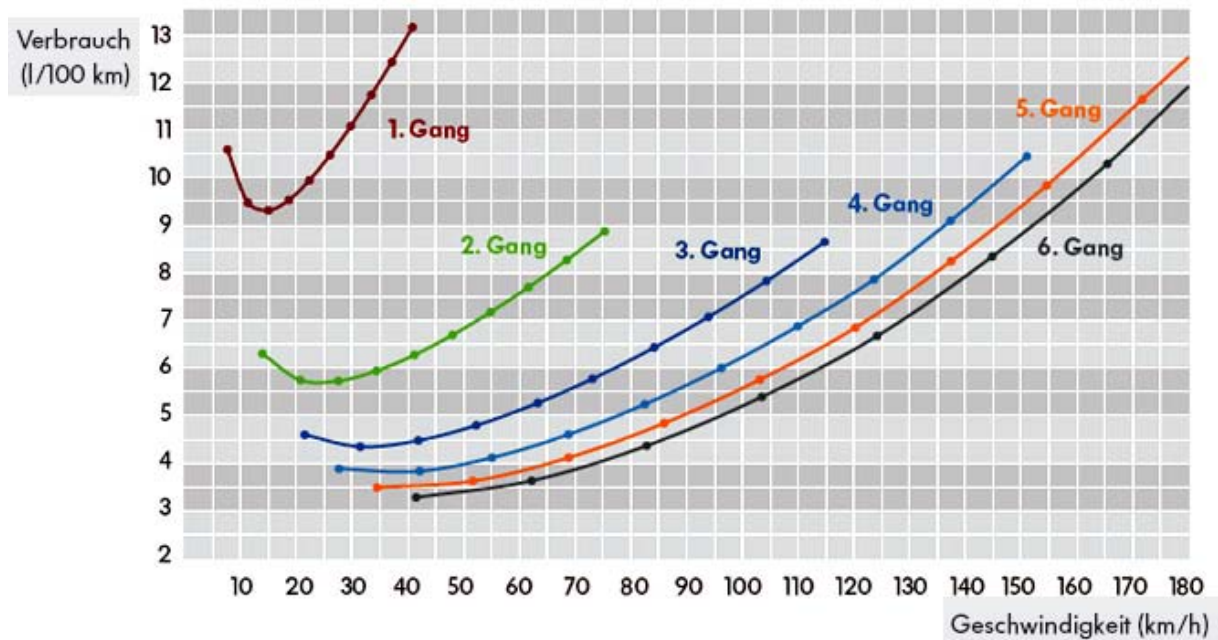


Abbildung 2-4: Verbrauchsdiagramm 1. - 6. Gang eines Golf 1,4 TSI mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur

B) Mathematisierung und Modellbildung

Mathematisches Modell II: Berücksichtigung des Luftwiderstandes

"Welche Rolle spielt der Luftwiderstand bei der Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw?"

Nachdem die SchülerInnen das Arbeitsblatt mit dem Verbrauchsdiagramm (siehe Anhang!) erhalten haben, kann eine erste Diskussion über das Aussehen der Graphen und damit über den Typ der Funktionen eingeleitet werden. Die sechs abgebildeten Funktionsgraphen sehen quadratischen Funktionen sehr ähnlich. Warum ist das so?

⁵ <http://www.motor-talk.de/bilder/10l-verbrauch-beim-einfahren-dsg-160ps-zu-hoch-g8428112/verbrauchsdiagramm-i203063293.html>

Theoretischer Hintergrund als Hilfe zur Modellbildung:

Im Kraftstoff ist die gesamte Energie (potentielle Energie) gespeichert, die für den Vortrieb eines Autos benötigt wird. Sie steckt in der Bindungsenergie der beteiligten chemischen Elemente (Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, ...) und wird bei der Verbrennung im Motor in nutzbare Energie (Bewegungsenergie, kinetische Energie) umgesetzt. Wie der genaue Brennvorgang in einem Motor aussieht, kann beispielsweise in einem fächerübergreifenden Projekt mit Chemie oder Physik erarbeitet werden. Auf die exakte Funktionsweise eines Verbrennungsmotors und den Verbrennungsablauf wird in der nachfolgenden Ausarbeitung nicht näher eingegangen.

Die Problemstellung liegt im Modellieren des Kraftstoffverbrauch $B(v)$ für den zurückgelegten Weg $s = 100 \text{ km}$ bei konstanter Geschwindigkeit v . Wie bereits oben erläutert wurde, wird die im Kraftstoff enthaltene Energie bei der Verbrennung im Motor zum Teil in nutzbare Arbeit $W = \text{Kraft} * \text{Weg} = F * s$ umgewandelt, der restliche Teil geht über die Abgase und Wärmestrahlung des Motors verloren. F stellt die Kraft dar, die vom Motor auf die Antriebsräder und folglich auf das gesamte Auto wirkt. Sie muss alle während der Fahrt auftretenden Reibungskräfte (Scheinkräfte) kompensieren, damit sich das Auto in Bewegung setzen kann. Der Einfachheit halber beschränke ich mich vorerst auf die zwei Widerstandskräfte F_1 und F_2 :

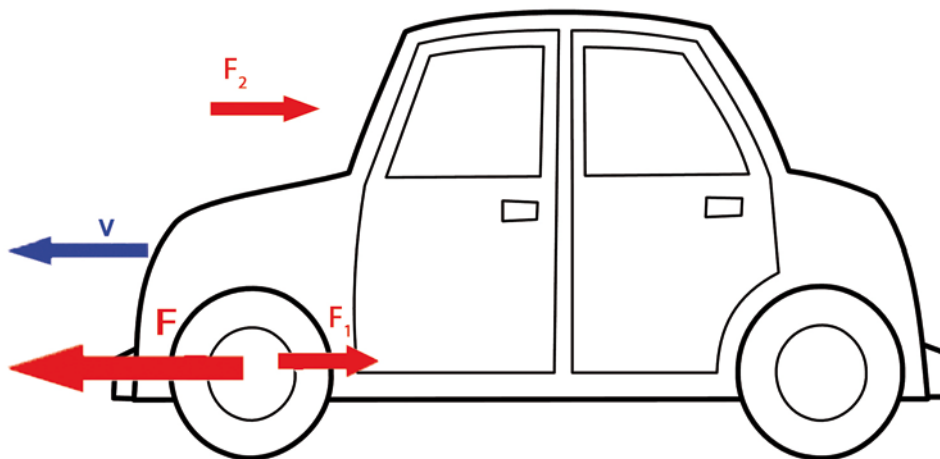


Abbildung 2-5: Vereinfachtes Kräfte diagramm eines Pkw⁶

⁶ bearbeitete Graphik aus dem Internet: <https://www.heilpaedagogik-info.de/ausmalbilder/autos.html>

Die beiden Widerstandskräfte F_1 und F_2 tragen dabei die folgenden Bedeutungen:

- F_1 beinhaltet alle Kraftformen, die nötig sind, um die Reibung bzw. die Widerstandskraft aller beweglichen Teile im Motor (Kolben, Kurbelwellen, Getriebe), der Radachsen, die Rollreibung der Räder usw. zu überwinden. Die Reibungskraft ist im einfachsten Ansatz der *Coulombschen Reibung* geschwindigkeitsunabhängig!
- F_2 ist der Kraftbetrag, der nötig ist, die Reibung des Autos mit der Luft bei der Fahrt zu überwinden. Sie nimmt, im Gegensatz zur näherungsweise geschwindigkeitsunabhängigen Gleit- und Rollreibung, näherungsweise quadratisch mit der Geschwindigkeit zu! Warum ist das so? Für den Unterricht bieten sich nach Kirchgraber (1994, S. 10 f) zwei Möglichkeiten an, diesen Sachverhalt zu erklären:

1. Interpretation ohne physikalisches Hintergrundwissen

Dazu sollen die SchülerInnen von möglichst vielen verschiedenen Fahrzeugtypen (ADAC, ARBÖ, Autozeitschriften, Megatrumpfkarten, ...) die maximale Motorleistung und die Höchstgeschwindigkeit erkunden und in einer Tabelle zusammentragen. Alternativ kann auch die von mir bearbeitete und ergänzte **Tabelle 2-4** ausgewertet werden:

Fahrzeugtyp/ Automodell	Motorleistung in kW	Höchstgeschwindigkeit in km/h
Peugeot 106 Electric	11	90
Fiat 126	17	105
Citroen 2CV	20	110
Renault GTL	25	120
VW Polo	33	142
Opel Corsa	40	152
Ford Fiesta	54	163
Honda Civic	63	172
Ford Sierra	74	181
Volvo 360	82	180
Alfa Romeo Spider	94	193
Mercedes 230 DE	97	200

Audi 100	101	202
Saab 9000	118	210
BMW 528i	135	215
Porsche 911	160	240
Porsche 911 Turbo	221	260
Ferrari Testarossa	287	290
Lamborghini Countach	334	295

Tabelle 2-4⁷: Fahrzeugtypen aufsteigend sortiert nach ihrer Leistung und ihrer Höchstgeschwindigkeit

Dabei ist die maximale *Motorleistung* eines Autos eine Größe, die den meisten Autofahrern/innen auch als *PS-Zahl* bekannt ist ($1 \text{ PS} \cong 0,735 \text{ kW}$, $1 \text{ kW} \cong 1,361 \text{ PS}$) und in der Zulassungsbescheinigung vermerkt ist. Bei genauerer Betrachtung der Daten aus **Tabelle 2-4** sieht man, dass eine Vergrößerung der Leistung um den Faktor k nur in etwa eine Vergrößerung der Höchstgeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt[3]{k}$ bewirkt. Die Proportionalität $v \sim \sqrt[3]{P}$ mit Höchstgeschwindigkeit v und Motorleistung P kann auch leicht mit Hilfe eines Leistungs-Geschwindigkeits-Diagramms (vgl. **Abbildung 2-6**) für die Wertepaare aus **Tabelle 2-4** deutlich gemacht werden:

⁷ <https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/ifdn-physik/leistung.pdf>

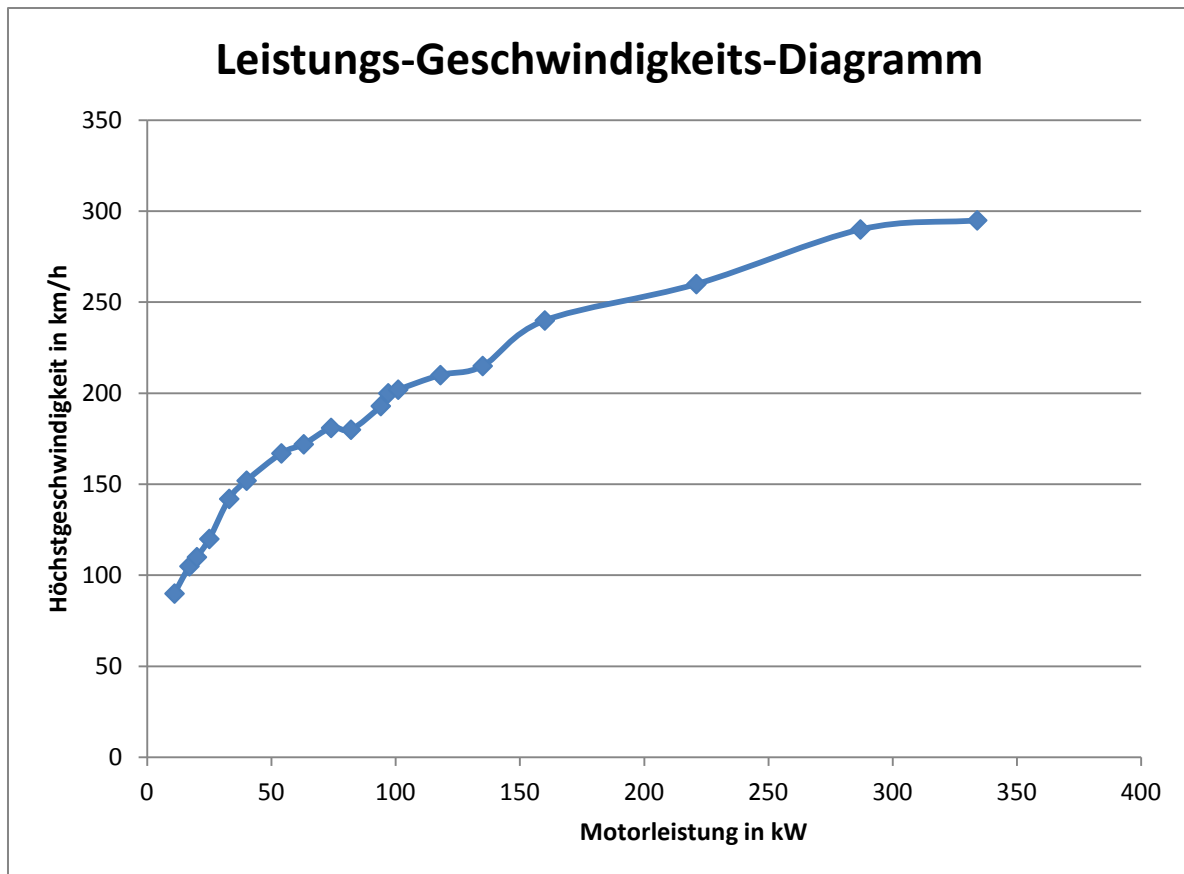


Abbildung 2-6: Erreichbare Höchstgeschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit von der Motorleistung

Das Abflachen der Kurve für höhere Motorleistungen bedeutet, dass es für Entwickler von Automotoren immer schwieriger sein wird, den Weltrekord für das schnellste Auto der Welt zu brechen, da für noch höhere Geschwindigkeiten die Motoren noch leistungsfähiger und dementsprechend massiv gebaut werden müssen, was sich wiederum negativ auf das Gesamtgewicht des Fahrzeuges auswirkt.

2. Interpretation mit physikalischem Hintergrundwissen: z.B. fächerübergreifend mit Physik

Zur Berücksichtigung des Luftwiderstandes und anderer Effekte, die durch den Luftdruck zustande kommen, betrachten wir eine Gleichung, die man in vielen Physikbüchern (z.B. Tipler, 1994, S. 369) oder in einschlägiger Fachliteratur (vgl. Reif, 2011, S. 143) wiederfinden kann:

$$F_2 = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

In dieser Formel bedeuten

- F_2 die Luftwiderstandskraft (Scheinkraft), die die Vorwärtsbewegung behindert,
- c_w eine dimensionslose Zahl, der sogenannte Luftwiderstandsbeiwert,
- ρ die Dichte des Mediums (hier Luft), in dem sich das Auto bewegt,
- A die Querschnittfläche (Stirnfläche), die senkrecht zur Fahrtrichtung steht und
- v die relative Geschwindigkeit von Auto und Luft (Medium).

Bemerkung: Wie in vielen anderen realitätsnahen Anwendungen der Physik ist diese Formel nur eine Näherung, nicht die "Lösung" luftdynamischer Prozesse. Der wichtigste Grund dafür ist, dass es für den Luftwiderstand kein einfaches Modell gibt! Beispielsweise ist der in vielen Autozeitschriften hochgepriesene c_w -Wert ein äußerst schwer zu bestimmender, in aufwendigen Experimenten zu ermittelnder Wert. Er wird zum Beispiel in Windkanälen hergeleitet und hängt auf komplizierte Weise von der speziellen Form des betrachteten Körpers (hier Autos), der Geschwindigkeit, der Temperatur und der verwendeten Materialien ab. Für einige Anwendungen, wie beispielsweise das Autofahren, ist der c_w -Wert jedoch näherungsweise geschwindigkeitsunabhängig, was unsere Rechnung vereinfacht.

□

Die obigen Kenntnisse über die Luftwiderstandskraft F_2 können nun ausgenutzt werden, um eine empirische Formel für den Kraftstoffverbrauch $B(v)$ für den Weg $s = 100 \text{ km}$ bei konstanter Geschwindigkeit v anzusetzen:

$$B(v) = a + bv^2$$

mit den noch unbestimmten Parameterwerten a und b . Zur Kontrolle, ob dieser Ansatz den physikalischen Hintergrund rechtfertigt, können noch die Einheiten auf der linken und rechten Seite der Gleichung ausgewertet werden. Nachdem $B(v)$ die Einheit "Energie pro Weg" hat und die Einheit der Energie gleich der Einheit von Arbeit, also "Kraft * Weg" ist, muss es sich bei den Summanden auf der rechten Seite ebenfalls um Kraftbeiträge handeln:

$$[B(v)] = \frac{\text{Liter}}{100\text{km}} \sim \frac{\text{Energie}}{\text{Weg}} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Weg}} = \frac{\text{Kraft} * \text{Weg}}{\text{Weg}} = \text{Kraft} = [a + bv^2]$$

$$\Rightarrow [\text{rechte Seite}] = [a + bv^2] = \text{Kraft}$$

Damit entspricht der Parameter a einer konstanten Kraft, der Parameter b dem Ausdruck $\frac{1}{2}c_w\rho A$ aus der Luftwiderstandformel.

Bemerkung: Es wurde bereits geschildert, dass sich die Gesamtkraft, die der Motor bei der Verbrennung auf das Fahrwerk und die Karosserie überträgt, in zwei Anteile aufspaltet, in eine Kraft F_1 und F_2 . Dabei wurde davon ausgegangen, dass es sich beim Kraftanteil F_1 um die (näherungsweise) geschwindigkeitsunabhängige Rollreibung und beim Kraftanteil F_2 um die Luftwiderstandskraft handelt, die mit der Geschwindigkeit (näherungsweise) quadratisch zunimmt. Diese beiden Kraftanteile entsprechen genau den beiden Summanden des empirischen Formelansatzes für den Kraftstoffverbrauch, der somit mit der "dahintersteckenden" Physik verträglich ist!

□

Da Rollreibungs- und Luftwiderstandsbeiwerte, sowie Querschnittsflächen unterschiedlicher Automodelle, in der Regel nur schwer oder überhaupt nicht zugänglich sind, besteht die Aufgabe nun darin, Werte für die Parameter a und b abzuschätzen, wenn in weiterer Folge untersucht werden soll, wie gut die bisher behandelte Theorie die gemessenen Verbrauchswerte in [Abbildung 2-4](#) beschreibt. Die Parameter a und b müssen also derart bestimmt werden, dass die entsprechenden Funktionsgraphen (Parabeln) möglichst gut die farbigen Verbrauchskurven wiedergeben. Die *Messwertanalyse* und die damit verbundene Bestimmung von a und b kann beispielsweise in sechs Arbeitsgruppen

Gruppe 1	Verbrauch im 1. Gang	rote Kurve
Gruppe 2	Verbrauch im 2. Gang	grüne Kurve
Gruppe 3	Verbrauch im 3. Gang	blaue Kurve
usw.		
...		

zu je vier bis maximal fünf SchülernInnen erfolgen. Jeder dieser sechs Gruppen wird eine "Verbrauchskurve" zugeordnet, für die eine *Messwertanalyse* durchgeführt werden soll. Selbstverständlich können von den SchülernInnen auch eigene Verbrauchsdiagramme nach

obiger Beschreibung angefertigt und im Unterricht analysiert werden. Nach Kirchgraber (1994, S. 15) stehen für die Güte der Auswertung quadratischer Funktionen für die 11. Schulstufe keine sinnvollen Methoden zur Verfügung. Allerdings kann durch eine geschickte Linearisierung der Messwerte eine gute Näherung für die Parameter a und b gefunden werden. Natürlich lassen sich entsprechende Messwerte auch in eine *Excel*-Tabelle eingeben und anschließend eine Trennlinie ausgeben (diese Methode kann auch zur Kontrolle herangezogen werden!). Ich möchte an dieser Stelle jedoch eine etwas "handwerklichere", konventionellere Methode der *Interpolation* vorstellen, wie sie auch von Kirchgraber verwendet wird. Mit der *Linearisierung* von Messwerten kann schon mit einem einfachen Lineal eine Näherungsgerade durch die Messwerte gezeichnet werden und anschließend die Steigung dieser Geraden mit Hilfe eines Steigungsdreiecks ermittelt werden. SchülernInnen können dabei folgende, für die Schule wichtige Kompetenzen vermittelt werden:

- Eine quadratische Funktionsgleichung bei gegebenen Funktionsgraphen aufstellen und interpretieren können.
- Die wesentlichen Parameter einer quadratischen Funktion aus einem Funktionsterm herauslesen und Funktionsterme entsprechenden Funktionsgraphen zuordnen können.
- Ein Gefühl für Definitions- und Wertebereich bekommen und Achseneinteilungen geschickt wählen können.
- Das Prinzip der *Substitution* kennenlernen und anwenden können.
- Ein Steigungsdreieck einzeichnen und die Steigung einer Geraden mit Hilfe eines Lineals bestimmen können.

Im Folgenden möchte ich nun diese Methode der *Messwertanalyse* am Beispiel der Verbrauchskurve für den 5. Gang (**orange Linie**) demonstrieren:

Beispiel Messwertanalyse: Führe eine Messwertanalyse mit Hilfe einer geeigneten Linearisierung von Messwerten für die Verbrauchskurve des fünften Gangs durch!

Lösungsvorschlag:

Als Erstes müssen aus **Abbildung 2-4** einige Wertepaare herausgelesen werden. Dabei gilt: Je mehr Wertepaare, desto genauer ist das Endergebnis! Für die Auswertung bieten sich beispielsweise folgende Wertepaare an:

v [km/h]	35	65	90	115	140	155	170
$B(v)$ [l/100km]	3,5	4	5	6,5	8,5	10	11,5

Tabelle 2-5: Wertepaare des 5. Gangs (orange Kurve)

Unsere Verbrauchsgleichung mit den zu bestimmenden Parametern a und b soll die Form

$$B(v) = a + bv^2$$

haben. Nach Substitution mit $x := v^2$ erhält man *linearisierte* Wertepaare (x_i/y_i)

x_i	1225	4225	8100	13225	19600	24025	28900
y_i	3,5	4	5	6,5	8,5	10	11,5

Tabelle 2-6: Linearisierte Wertepaare des 5. Gangs (orange Kurve)

die der "neuen" Verbrauchsgleichung

$$B(x) = a + bx$$

genügen. Die Parameter a und b entsprechen jetzt dem y-Abstand bzw. der Steigung der Interpolationsgeraden. Da alle x_i und y_i positiv sind, reicht es aus, die Achsen für den ersten Quadranten (empfohlene Skalierung x-Achse: 1 cm $\equiv$ 2000 E; empfohlene Skalierung y-Achse: 1 cm $\equiv$ 1 E) zu zeichnen. Nachdem alle Punktpaare und eine "Durchschnittsgerade" eingezeichnet worden sind, erhält man in etwa das folgende Bild:

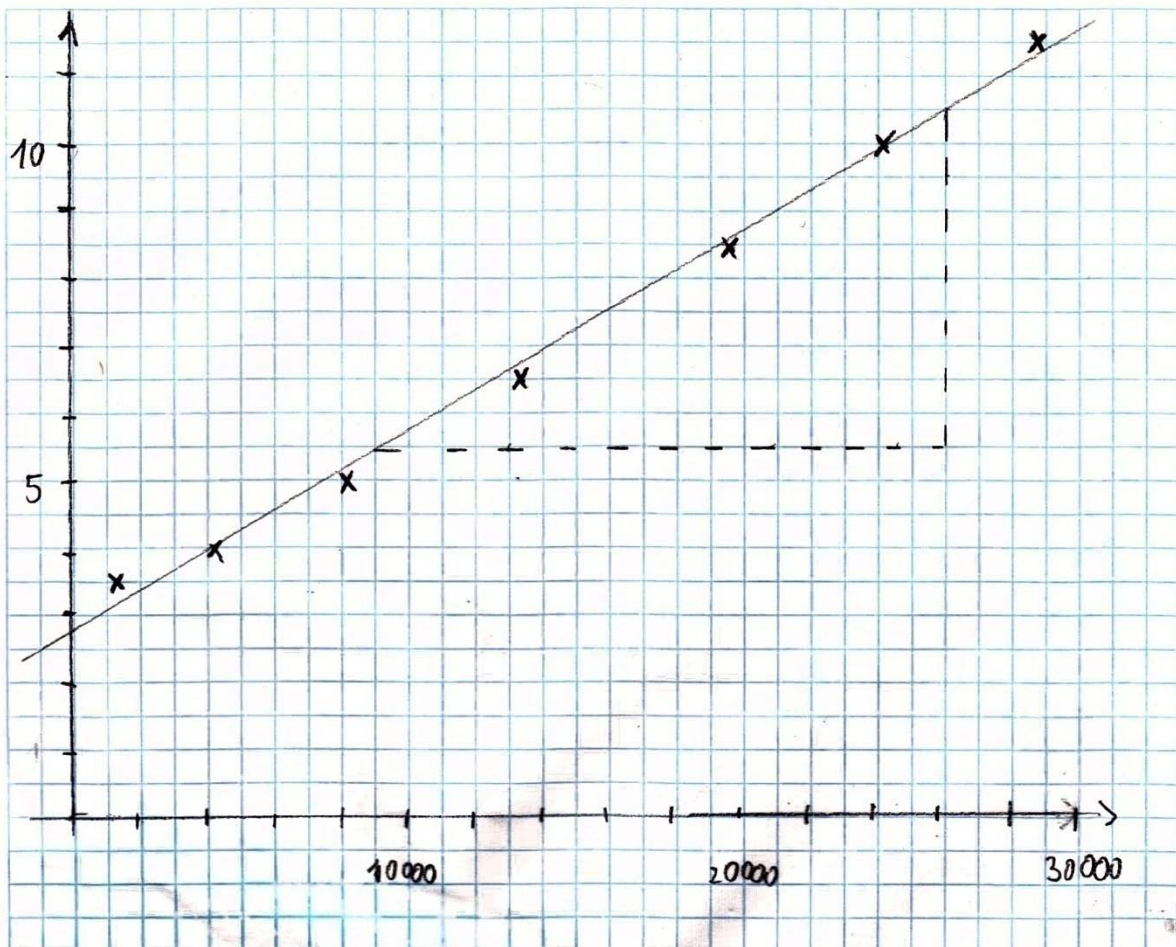


Abbildung 2-7: Linearisierte Messwerte mit eingetragener Regressionsgeraden

Anschließend können die Werte für a und b wie folgt abgelesen werden:

$$a = y_{\text{Abstand}} \approx 2,75$$

$$b = \text{Steigung} = \frac{10,5 - 5,5}{26000 - 9000} = \frac{5}{17000} = \frac{1}{3400} \approx 0,0003$$

Damit lautet die erste empirische Verbrauchsgleichung für den fünften Gang:

$$B(v) = 2,75 + 0,0003v^2$$

□

Weiterführende Fragestellungen:

- a) Warum sind die Geschwindigkeitsbereiche des *Golf* in den jeweiligen Gängen beschränkt? Was ist die Höchstgeschwindigkeit, die mit dem ersten Gang erreicht

werden kann? Was ist die Minimalgeschwindigkeit, die mit dem sechsten Gang gefahren werden kann?

- b) Ein Autofahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 40 \text{ km/h}$ auf offener Landstraße. In welchem Gang verbraucht er den meisten / den wenigsten Kraftstoff?
- c) In welchem Gang verbraucht ein Auto nach obigem Modell (nur Berücksichtigung des Luft- und Rollwiderstandes) den wenigsten Kraftstoff? Welche Konsequenzen für einen verbrauchsarmen Fahrstil können daraus abgeleitet werden? Ist dieses Modell realistisch?

Lösungsvorschläge:

zu a): Ein Automotor hat nur einen begrenzten Drehzahlbereich, in dem er effizient arbeiten und mechanische Leistung abgeben kann. Er benötigt also ein Schaltgetriebe (eine Art Übersetzung wie beim Fahrrad), das eine optimale Drehzahl des Motors und der Reifen gewährleistet und damit bestimmte Geschwindigkeiten erreicht werden können. Die Maximalgeschwindigkeit im ersten und die Minimalgeschwindigkeit im sechsten Gang betragen in beiden Fällen etwa 40 km/h .

zu b): Unter Betrachtung von **Abbildung 2-4** kann der Verbrauch bei 40 km/h für die jeweiligen Gänge herausgelesen werden:

Gefahrener Gang	Verbrauch bei 40 km/h
1. Gang	13,1 Liter (maximal)
2. Gang	6,25 Liter
3. Gang	4,5 Liter
4. Gang	3,8 Liter
5. Gang	3,5 Liter
6. Gang	3,25 Liter (minimal)

Tabelle 2-7: Verbrauch bei 40 km/h in den jeweiligen Gängen

Das Auto verbraucht bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h im ersten Gang den meisten (13,1 Liter) und im sechsten Gang (3,25 Liter) den wenigsten Kraftstoff.

zu c): Es ist zu erkennen, dass der *Golf* immer im sechsten Gang am sparsamsten gefahren werden kann. Dies würde bedeuten, dass man bei jeder Fahrt möglichst schnell

hochschalten sollte, sobald eine Mindestgeschwindigkeit von 40 km/h erreicht worden ist, um einen möglichst geringen Verbrauch zu erzielen. Im Alltag ist ein solcher Fahrstil nur selten möglich: Auf vielen befahrbaren Straßen können sich Staus oder Engstellen ergeben, oder die Straßen sind sehr kurvenreich und steigen an. Darum ist eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit in den seltensten Fällen tatsächlich möglich. Das obige angewandte Verfahren zur Berechnung des Kraftstoffverbrauchs ist also nur für annähernd gleichbleibende Geschwindigkeiten und "idealisierte" Straßenverhältnisse (freie Fahrt, keine Stop-&-Go-Zyklen, etc.) geeignet. Es berücksichtigt ebenfalls noch keine verbrennungsspezifischen Eigenschaften wie z.B. den Motorwirkungsgrad!

□

2.3. Modell 3: Kraftstoffverbrauch bei konstanter Geschwindigkeit unter Berücksichtigung des Motorwirkungsgrades

In **Kapitel 2.2.** wurde ein sehr allgemeiner Gleichungsansatz der Verbrauchskurve im fünften Gang verwendet, um den Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit zu berechnen. Als Einflussfaktoren auf den Verbrauch wurden dabei nur die Rollreibungs- und Luftwiderstandskraft angenommen. Nun ist es an der Zeit, weitere Verluste beim Autofahren zu berücksichtigen, die sich auf den Kraftstoffverbrauch auswirken. Neben den Verlusten, die aufgrund von Luft- und Rollreibungskräften zustande kommen, treten weitere Verluste bei der Verbrennung von Kraftstoff im Motor auf, die ich in meinem dritten Modell berücksichtigen möchte.

A) Einstieg in den Unterricht

Aus der Thermodynamik und den Formulierungen des zweiten Hauptsatzes weiß man, dass eine thermodynamische Maschine (z.B. Ottomotor, Stirlingmotor) Wärme nicht vollständig in mechanische oder elektrische Arbeit umwandeln kann. Es bleibt immer ein Teil an Wärmeenergie übrig, die ohne Nutzen an die Umgebung abgegeben wird. Beim Automotor sind dies die heißen Verbrennungsgase, die durch den Katalysator gefiltert und über den

Auspuff an die Umgebungsluft abgegeben werden. Für den maximalen Wirkungsgrad eines Verbrennungsmotors gelten folgende Eigenschaften:

1. Je höher die einer Wärmekraftmaschine verrichtete Arbeit ist, desto höher ist ihr Wirkungsgrad.
2. Je höher die der Maschine zugeführte Wärme ist, desto geringer ist der Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine.

Dies führt sofort zur Definition des Wirkungsgrades für Wärmekraftmaschinen und damit zu der von Verbrennungsmotoren, wie sie üblicherweise in Autos eingesetzt werden:

$$\eta = \frac{\text{vom Motor verrichtete Arbeit}}{\text{dem Motor zugeführte Wärme}} < 1$$

Eine gute, anschauliche Alternative für den Wirkungsgrad von Verbrennungsmotoren bietet auch ein sogenanntes Wärmeflussdiagramm:

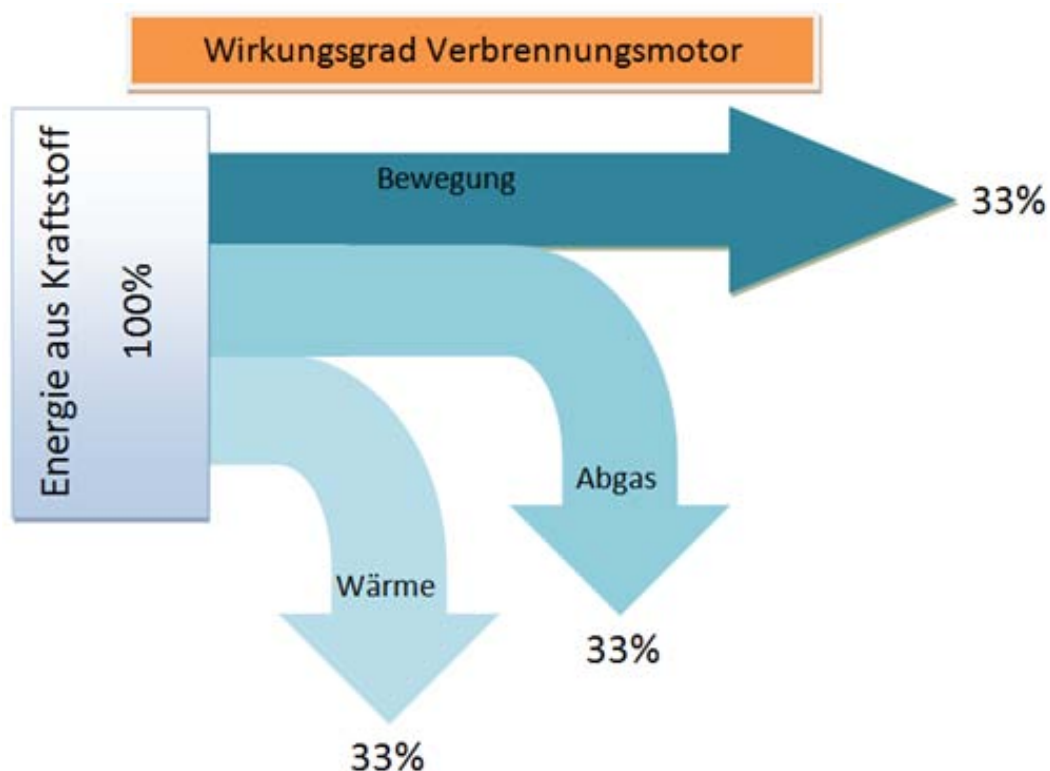


Abbildung 2-8⁸: Wärmeflussdiagramm eines herkömmlichen Verbrennungsmotors

⁸ <http://www.gs-emobility.de/wissenswertes>

Die im Kraftstoff gespeicherte Energie wird also nur zu etwa einem Drittel in nutzbare Bewegungsenergie umgewandelt! Überdies hinaus kann der Wirkungsgrad eines Verbrennungsmotors auch über dessen zugeführte und abgegebene Leistung definiert werden:

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}} < 1$$

Verbrennungsmotoren sind so konzipiert, dass sie unter Last und bei hoher Drehzahl eine höhere Leistung abgeben können. Die Verbrennung wird "sauberer", dadurch steigt der Wirkungsgrad! Das kann man sich in etwa so vorstellen:

Der drehzahlabhängige Zündzeitpunkt eines Motors ist für einen optimalen Lauf so eingestellt, dass bei größter Drehzahl, also bei größtem Verbrauch, die Zündung optimal wird. Kleinere Geschwindigkeiten und damit kleinere Drehzahlen bedeuten einen schlechteren Motorwirkungsgrad. (vgl. Kirchgraber, 1994, S. 16)

B) Mathematisierung und Modellbildung

Mathematisches Modell III: Berücksichtigung des Motorwirkungsgrades

Welche Rolle spielt der Motorwirkungsgrad bei der Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw?

Es kann nun obiger Sachverhalt ausgenutzt werden, um die in **Kapitel 2.2.** gefundene, geschwindigkeitsabhängige Kraftstoffverbrauchsformel dahingehend zu erweitern, dass neben Roll- und Luftwiderstand nun auch der Motorwirkungsgrad berücksichtigt und ein zusätzlicher Term eingeführt wird, der linear mit der Geschwindigkeit geht. Der verfeinerte, allgemeine Ansatz für den Verbrauch lautet demnach:

$$B(v) = a + bv + cv^2$$

Dabei entsprechen die beiden Parameter a bzw. c wieder dem konstanten Kraftanteil bzw. dem Ausdruck $\frac{1}{2}c_w \rho A$ aus der Luftwiderstandsformel. Es ist zu erwarten, dass $b < 0$ gilt, da angenommen wurde, dass der Verbrauch durch den höheren Motorwirkungsgrad bei höherer Drehzahl und folglich bei höherer Geschwindigkeit v eher sinken wird. Die

Bestimmung der Parameter a , b und c ist jetzt etwas komplizierter als im vorigen Modell, für die 11. Schulstufe möchte ich dennoch die folgenden drei Möglichkeiten anbieten, von denen zwei in Anlehnung an die von Kirchgraber (1994, S. 12 f) vorgeschlagenen Methoden modifiziert wurden:

Möglichkeit 1 - Lösen linearer Gleichungssysteme

Jeweils drei der sieben Wertepaare (v_i/B_i) bestimmen eindeutig eine Parabel mit Gleichung $B(v) = a + bv + cv^2$. SchülerInnen bestimmen möglichst viele Wertetripel (a, b, c) und berechnen daraus Mittelwerte für die gesuchten Parameter a , b und c .

Zu Demonstrationszwecken verwende ich wieder die Wertepaare des vorangegangenen Beispiels (5. Gang, orange Kurve):

v [km/h]	35	65	90	115	140	155	170
$B(v)$ [l/100km]	3,5	4	5	6,5	8,5	10	11,5

Tabelle 2-8: Wertepaare des 5. Gangs (orange Kurve)

Um möglichst genaue Mittelwerte für die gesuchten Parameter a , b und c zu erhalten, bildet man aus den sieben Wertepaaren alle möglichen Punkttripel. Dieser Vorgang entspricht dem zufälligen Ziehen (ohne Zurücklegen) dreier Kugeln aus einer Urne mit sieben Kugeln, wobei die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, vernachlässigt werden kann. Die Aufgabenstellung an die SchülerInnen besteht nun darin, alle möglichen Dreier-Kombinationen abzuleiten.

Lösungsvorschlag:

Im Urnenmodell entspricht jedes der sieben Wertepaare einer Kugel. Ich beschrifte sie mit A, B, C, D, E, F und G. Für das Ziehen von k Elementen ("Kugeln") aus einer Menge von n Elementen ("Urne") ohne Wiederholung ("Zurücklegen") und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Warum gerade so viele?

Beweisskizze: Angenommen, man würde die Ziehung von k aus n Elementen ohne Wiederholung aber mit Beachtung der Reihenfolge durchführen, so entspräche dies einer *Variation ohne Wiederholung*. Für eine derartige Ziehung gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. In diesem Beispiel ist die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, eben nicht zu

berücksichtigen. Deshalb muss noch durch die Anzahl der Möglichkeiten geteilt werden, auf die sich k Elemente anordnen lassen, denn die Anordnung der k Elemente ist bei Nichtbeachtung der Reihenfolge egal! Dies entspricht aber genau der Anzahl aller Permutationen von k Elementen, und das ist $k!$ Für die betrachtete Ziehung gibt es also genau $\frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten. $\square$

Es gibt demnach $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7*6*5}{3*2*1} = 35$ Möglichkeiten, drei Kugeln aus sieben auszuwählen:

Kombinationen	Anzahl der Möglichkeiten
$(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, B, F), (A, B, G)$ $(A, C, D), (A, C, E), (A, C, F), (A, C, G)$ $(A, D, E), (A, D, F), (A, D, G)$ $(A, E, F), (A, E, G)$ (A, F, G)	15
$(B, C, D), (B, C, E), (B, C, F), (B, C, G)$ $(B, D, E), (B, D, F), (B, D, G)$ $(B, E, F), (B, E, G)$ (B, F, G)	10
$(C, D, E), (C, D, F), (D, D, G)$ $(C, E, F), (C, E, G)$ (C, F, G)	6
$(D, E, F), (D, E, G)$ (D, F, G)	3
(E, F, G)	1

Tabelle 2-9: Kombinationsmöglichkeiten, drei aus sieben Kugeln auszuwählen

Wenn man dieses Ergebnis auf obige Wertepaare überträgt, so bedeutet das, dass insgesamt 35 Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen und drei Unbekannten zu lösen sind! Das könnte schnell etwas langweilig werden. Spätestens jetzt sollte man mit den SchülernInnen besprechen, welche computertechnischen Hilfsmittel für das Lösen linearer Gleichungssysteme zur Verfügung stehen. Es sei denn, man schafft es als Lehrkraft, seine Klasse zu einer Art "Supercomputer" zusammenzufügen. Dabei erhält jeder/e SchülerIn ein Gleichungssystem, das er/sie mit bekannten Methoden aus der Linearen Algebra in fünf

Minuten zu lösen hat. Diese Lösungsstrategie ist vermutlich äußerst effizient und jeder/e SchülerIn ist dazu verpflichtet, einen kleinen Teil zum Gesamtergebnis beizutragen. Anschließend werden die auf diese Weise ermittelten Parameter a , b und c an der Tafel zusammengetragen und arithmetische Mittelwerte gebildet. Alternativ können Gleichungssysteme auch als Hausübung aufgegeben werden. Damit erhält man eine gute Annäherung für den Kraftstoffverbrauch unter Berücksichtigung des Motorwirkungsgrades.

□

Möglichkeit 2 - Lösung durch Linearisierung

Wenn man davon ausgeht, dass die Funktion, die den Kraftstoffverbrauch im fünften Gang beschreibt, im Punkt $S(35/3,5)$ ein Minimum besitzt (S ist Scheitelpunkt der Parabel), dann erhält man den vereinfachten Ansatz mit nur zwei Parametern d und e in der Form

$$B(v) = d + e(v - 35)^2$$

Die Güte dieses Ansatzes kann wieder, wie im mathematischen Modell II, durch Linearisierung der Messwerte überprüft werden, indem die Punkte (x_i/y_i) mit $x_i = (v - 35)^2$ und $y_i = B(v)$ in ein Diagramm eingetragen werden. Aus der "neuen" Wertetabelle

x_i	0	900	3025	6400	11025	14400	18225
y_i	3,5	4	5	6,5	8,5	10	11,5

Tabelle 2-10: Linearisierte Wertepaare des 5. Gangs

resultiert die graphische Darstellung,

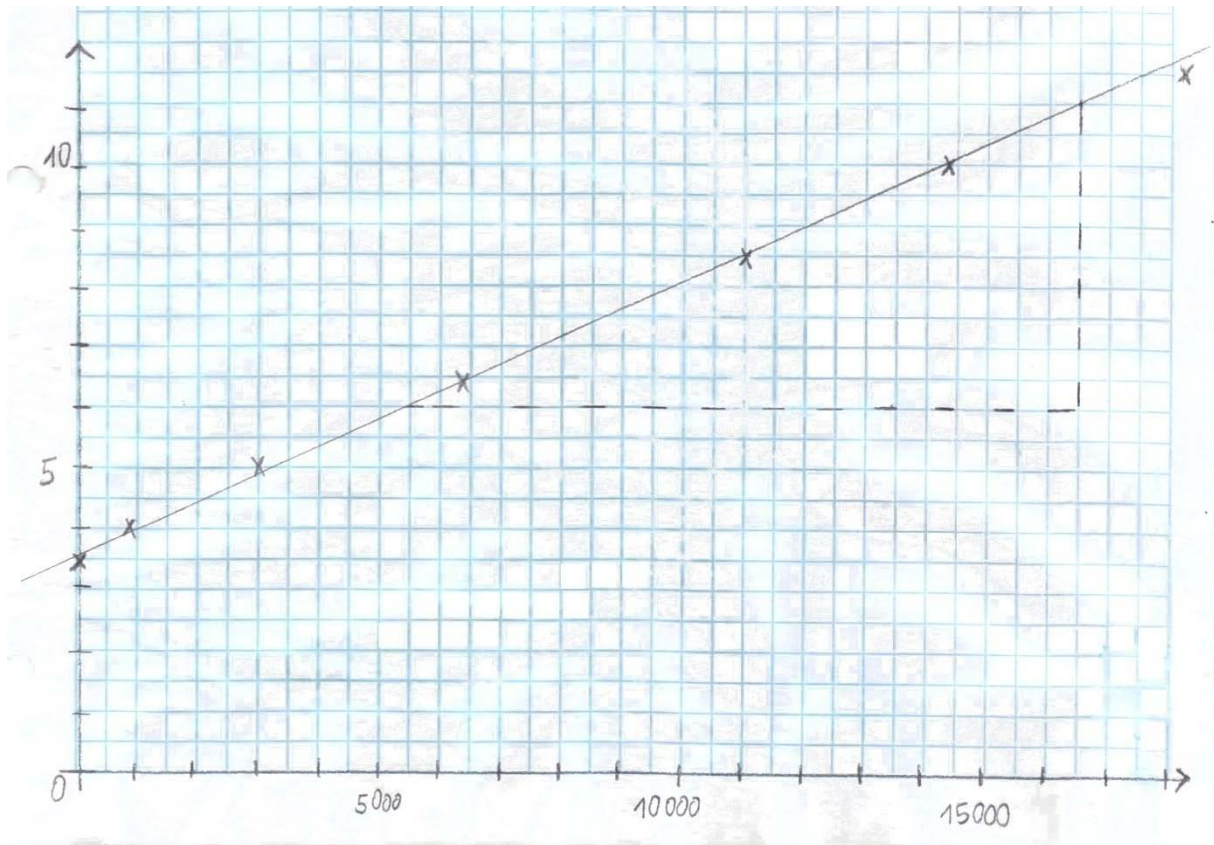


Abbildung 2-9: Linearisierte Messwerte mit eingezeichneter Regressionsgeraden

in die ich wieder eine Ausgleichsgerade eingezeichnet habe, deren Schnitt mit der y-Achse den Parameter d und deren Steigung den Parameter e liefern:

$$d = y_{\text{Abstand}} = 3,6$$

$$e = \text{Steigung} = \frac{11 - 6}{16500 - 5500} = \frac{5}{11000} = \frac{1}{2200} \approx 0,00045$$

Als Ergebnis erhalte ich die Kraftstoffformel

$$B(v) = 3,6 + 0,00045(v - 35)^2$$

□

Möglichkeit 3 - Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Diese Methode führt auf das Lösen *überbestimmter Gleichungssysteme* und richtet sich an alle Wahlfachgruppen Mathematik, an mathematisch besonders interessierte SchülerInnen und an all diejenigen, die das noch werden wollen. Voraussetzung sind grundlegende Kenntnisse aus der *Linearen Algebra* und der *Matrizenrechnung*, sowie aus der *numerischen*

Analysis. Jeder/e SchülerIn sollte zumindest schon einmal mit *Vektoren* und *Matrizen* gerechnet haben und wissen, wie transponierte und inverse Matrizen gebildet werden.

Die Problemstellung lautet:

Gelöst werden soll ein lineares Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten. In verallgemeinerter Form sieht das Gleichungssystem wie folgt aus:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \approx b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \approx b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \approx b_m$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$$

Dabei ist $\mathbf{A}$ die bekannte Koeffizientenmatrix, $\mathbf{b}$ der gegebene "Vektor der rechten Seite" und $\mathbf{x}$ der gesuchte Lösungsvektor. Weil im Regelfall kein Lösungsvektor existiert, mit dem alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden können, verwendet man anstelle des Gleichheitszeichens das "Ungefähr"-Symbol $\approx$. Es wird beim Einsetzen einer beliebigen Lösung in das Gleichungssystem im Allgemeinen bei jeder Gleichung jeweils ein "Rest", also ein Fehler r_i verbleiben:

$$r_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1$$

$$r_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2$$

$$\vdots$$

$$r_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m$$

bzw. in Matrixschreibweise sieht das Ganze dann so aus:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

Nach einem Vorschlag von *Gauß* soll nun der Lösungsvektor $\mathbf{x}$ bestimmt werden, für den die Summe der Quadrate der Fehler r_i minimal wird, also für den gilt:

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

Diese Forderung führt uns zu den allseits bekannten *Gaußschen Normalgleichungen*:

Satz: Für das überbestimmte lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit m Zeilen und n Spalten ($m \geq n$) findet man die *Gaußschen Normalgleichungen* durch Linksmultiplikation auf beiden Seiten mit der transponierten Koeffizientenmatrix, kurz:

Überbestimmtes Gleichungssystem	<i>Gaußsche Normalgleichung</i>
$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$

Dieses Gleichungssystem hat eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, seine Lösung ist die Näherungslösung für das Ausgangssystem im Sinne der Forderung nach dem Minimum der Summer der Fehlerquadrate.

Falls im Unterricht der Wunsch geäußert wird und Zeit bleibt, eine Begründung für das anschließende Vorgehen zum Lösen überbestimmter Gleichungssysteme zu geben, möchte ich eine Möglichkeit vorstellen, wie der Beweis des obigen Satzes aussehen könnte:

Beweisskizze: Der Einfachheit halber bezeichne ich im Folgenden die vom Lösungsvektor $\mathbf{x}$ abhängige Summe mit $F(\mathbf{x})$, also

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m r_i^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \rightarrow \text{Minimum}$$

Dieser Forderung nach einem Minimum der Summe der Fehlerquadrate entspricht nichts anderes als eine "Extremwertaufgabe". Wie bei einer Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, werden auch hier die Nullstellen der ersten Ableitung berechnet, oder besser noch: Es wird nach einer Bedingung gesucht, damit die erste Ableitung der Funktion $F(\mathbf{x})$ verschwindet. Da es sich bei $F(\mathbf{x})$ um eine skalare Funktion handelt, die von mehreren Variablen, nämlich $x_1, x_2, \dots, x_n$ abhängt, sind die partiellen Ableitungen von $F(\mathbf{x})$ gleich null zu setzen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Kurz:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

Was aber bedeutet die Ableitung nach einem Vektor? In der Mathematik wird die partielle Ableitung eines Ausdrucks nach einem Vektor als Vektor definiert, der die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks nach den Komponenten des Vektors enthält:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

In einer expliziten Übung kann von den SchülernInnen leicht verifiziert werden, dass für ein Skalarprodukt bzw. eine sogenannte quadratische Form die folgenden Differentiationsvorschriften gelten müssen:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} \mathbf{b}^T) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{b}^T \mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Man kann nun diese beiden Beziehungen ausnutzen und $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$ berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ((\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ((\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{b}^T) (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{b}) = \\ &= 2 \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} = \\ &= 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Nullstellen der ersten Ableitung von $F(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Dieses Ergebnis führt unmittelbar auf die *Gaußschen* Normalgleichungen. □

Die Aufgabe besteht im Folgenden also darin, die transponierte Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}^T$ unseres überbestimmten Gleichungssystems zu bilden, diese von links mit unserer ursprünglichen Gleichung zu multiplizieren und das neue Gleichungssystem (z.B. mit dem *Gaußschen Eliminationsverfahren*) zu lösen. Ich möchte nun diese Schritte für das obige Beispiel durchführen.

Lösungsvorschlag für das Lösen überbestimmter Gleichungssysteme:

Ich verwende wieder die bereits bekannten sieben Wertepaare

v [km/h]	35	65	90	115	140	155	170
$B(v)$ [l/100km]	3,5	4	5	6,5	8,5	10	11,5

Tabelle 2-11: Wertepaare des 5. Gangs

und setze sie nacheinander in den quadratischen Funktionsgleichungsansatz

$$B(v) = a + bv + cv^2$$

ein. Somit erhalte ich folgende sieben Gleichungen:

$$a + 35b + 1225c = 3,5$$

$$a + 65b + 4225c = 4$$

$$a + 90b + 8100c = 5$$

$$a + 115b + 13225c = 6,5$$

$$a + 140b + 19600c = 8,5$$

$$a + 155b + 24025c = 10$$

$$a + 170b + 28900c = 11,5$$

Das zu lösende überbestimmte Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 35 & 1225 \\ 1 & 65 & 4225 \\ 1 & 90 & 8100 \\ 1 & 115 & 13225 \\ 1 & 140 & 19600 \\ 1 & 155 & 24025 \\ 1 & 170 & 28900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 5 \\ 6,5 \\ 8,5 \\ 10 \\ 11,5 \end{pmatrix}$$

Durch sukzessives Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält man die transponierte Koeffizientenmatrix

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 35 & 65 & 90 & 115 & 140 & 155 & 170 \\ 1225 & 4225 & 8100 & 13225 & 19600 & 24025 & 28900 \end{pmatrix}$$

und nach Multiplikation von links mit unserer ursprünglichen Matrix A

$$A^T A = \begin{pmatrix} 7 & 770 & 99300 \\ 770 & 99300 & 13948250 \\ 99300 & 13948250 & 2056432500 \end{pmatrix}$$

bzw. für die rechte Seite

$$A^T b = \begin{pmatrix} 49 \\ 6275 \\ 886850 \end{pmatrix}$$

Damit müssen also folgende *Gaußsche Normalgleichungen* gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} 7 & 770 & 99300 \\ 770 & 99300 & 13948250 \\ 99300 & 13948250 & 2056432500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 6275 \\ 886850 \end{pmatrix}$$

Ich multipliziere beide Seiten der Gleichung von links mit der inversen Matrix $(A^T A)^{-1}$, und erhalte für den Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,77394 \\ -0,02224 \\ 0,00040 \end{pmatrix}$$

Die empirische Formel für den Kraftstoffverbrauch hat daher näherungsweise die Form

$$B(v) = 3,77394 - 0,02224v + 0,0004v^2$$

□

Überprüfung der Güte der bisherigen Modellansätze:

Spätestens jetzt sollte man sich natürlich dafür interessieren, wie gut die Modellannahmen gewählt wurden und wie genau die Approximationsgraphen zur tatsächlichen Kurve des fünften Gangs (**orange Kurve** in **Abbildung 2-4**) passen. Ich verwende die Software *GeoGebra* 4.4. Sie ist kostenlos und für jeden zugänglich, der einen Computer, ein Handy oder einen Tablet-PC besitzt. Die *GeoGebra-Application* für Mobiltelefone und Tablet-PCs ist besonders für SchülerInnen interessant, da sie beispielsweise ihre Endgeräte mit dieser Software ausstatten und folglich als voll funktionsfähige CAS-taugliche Taschenrechner verwenden können. Also, Handys bitte einschalten!

Für meine Zwecke, nämlich der Überprüfung der Güte unserer Messwertanalysen, erstelle ich eine neue Datei in *GeoGebra*, welche die interpolierten Funktionsgraphen der drei Modellansätze und die ursprünglichen sieben Wertepaare der Ausgangskurve darstellen soll. Funktionen werden in *GeoGebra* gewöhnlich mit " $f(x)=...$ " in der Eingabezeile eingegeben und mit der "Enter"-Taste bestätigt. Unter "Einstellungen -> Runden" kann die Anzahl der angezeigten Nachkommastellen in der Algebra-Ansicht eingestellt werden. In diesem Fall empfiehlt sich die Anzahl der Nachkommastellen auf fünf festzulegen. Punkte lassen sich analog mittels " $P=(.../...)$ " in der Eingabezeile eingeben. Ich bezeichne die sieben Anfangs-Wertepaare mit B_1 bis B_7 . Mit dem "Zeichenblatt verschieben"-Werkzeug kann nun der relevante Ausschnitt in der Zeichenebene festgelegt werden. Man zeige dazu mit der Maus auf eine Achse und ziehe nach links oder rechts (bzw. oben oder unten), während man die linke Maustaste gedrückt hält, solange, bis man den gewünschten Ausschnitt erreicht hat. Zur besseren Übersicht habe ich die drei Funktionsgraphen entsprechend der Farben ihrer Gleichungen eingefärbt.⁹ Nach erfolgreicher Eingabe aller Funktionen, Punkte und Parameter erhält man schließlich das folgende Bild:

⁹ Für weitere Informationen über und Arbeitsweisen in *GeoGebra* möchte ich auf die offizielle *GeoGebra*-Website unter <http://geogebra.org> verweisen.

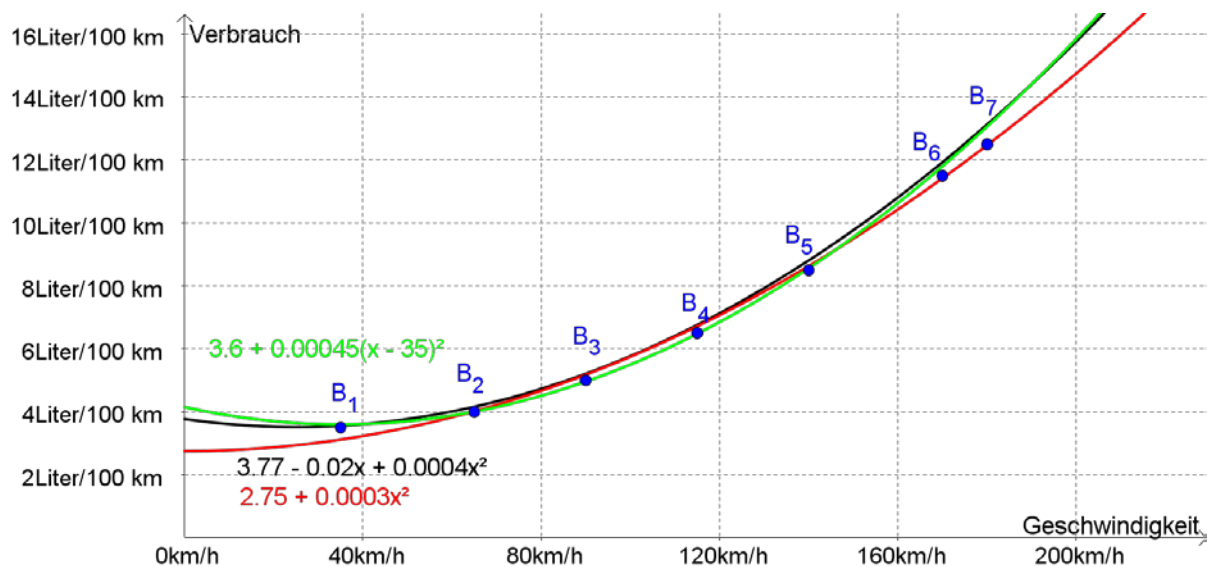


Abbildung 2-10: Interpolationsgraphen (rot: aus Modell II unter Berücksichtigung von Luftreibung; schwarz und grün: aus Modell III unter Berücksichtigung von Luftreibung und Motorwirkungsgrad)

Interpretation der Ergebnisse

- Wie zu erwarten war, unterscheiden sich die grüne und die schwarze Kurve nur minimal voneinander. In beiden Modellansätzen für die Funktionsgleichungen werden die Luftreibung und der Motorwirkungsgrad berücksichtigt. Sie sind die (bisher) besten Approximationen für die Ausgangs-Wertepaare der Kraftstoffverbrauchskurve des 5. Gangs.
- Die rote Funktionsgleichung stammt von dem zweiten Modellansatz, in dem nur der Roll- und Luftwiderstand berücksichtigt werden. Wie aus [Abbildung 2-10](#) zu erkennen ist, approximiert der rote Graph die ursprünglichen Funktionswerte bei höheren Geschwindigkeiten etwas besser als bei niedrigeren. Bei dem schwarzen und dem grünen Graph ist es genau umgekehrt. Der Motorwirkungsgrad fällt offensichtlich bei niedrigeren Geschwindigkeiten etwas stärker ins Gewicht. Bei hohen Geschwindigkeiten dominiert die Luftreibung das Verhalten der Verbrauchskurve!

Für Lehrkräfte sowie SchülerInnen bieten sich folgende [weiterführende Fragestellungen und Aufgaben](#) an, welche im Rahmen eines Arbeitsblattes (siehe Anhang!) bearbeitet werden können:

- Wieso verlaufen in [Abbildung 2-4](#) die drei Kurven für den 4., 5. und 6. Gang annähernd parallel?

- Wieso ist der Kraftstoffverbrauch für Fahrten im Stadtgebiet meistens wesentlich höher als für Fahrten auf der Autobahn?
- Kaum ein Auto verbraucht so wenig Sprit wie der Hersteller verspricht! In Österreich müssen deshalb seit einigen Jahren in Pkw-Verkaufsprospekten, Inseraten und auf Plakaten von Händlern verpflichtend Angaben zum Kraftstoffverbrauch gemacht werden.¹⁰ Dabei hat die Angabe des Kraftstoffverbrauchs für drei unterschiedliche Fahrsituationen zu erfolgen: bei Stadtzyklus, bei 90 km/h und bei 120 km/h. SchülerInnen können Zeitschriften und Prospekte von Autohändlern sammeln und die entwickelte Kraftstoffverbrauchstheorie anwenden. Dazu genügen lediglich zwei Verbrauchsangaben bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten, um jeweils das Verbrauchspolynom $B(v) = a + bv^2$ bei Verwendung von Modell II bzw. $B(v) = d + e(v - 35)^2$ (oder $B(v) = d + e(v - 40)^2$) bei Verwendung von Modell III (man kann davon ausgehen, dass die Verbrauchsmessungen der Hersteller jeweils im höchsten oder zweithöchsten Gang durchgeführt werden!) zu bestimmen.
- SchülerInnen können ihre Ergebnisse für verschiedene Fahrzeugtypen in einem Diagramm zusammentragen und diskutieren: Wie macht sich eine mehr oder weniger strömungsgünstige Autokarosserie (d.h. der c_W -Wert) bemerkbar? Was kann ein Gepäckträger auf dem Autodach bewirken? Welcher maximale Verbrauch ist aufgrund der angegebenen Höchstgeschwindigkeit zu erwarten? Wieso ist bei manchen (speziell älteren) Autos der Parameter a meist höher als der maximale Verbrauch anderer (modernerer) Fahrzeuge?
- Machen "Luft-Hunderter" auf Autobahnen Sinn? Begründe deine Antwort!
- Kann das oft zitierte 1- oder 2-Liter Auto tatsächlich realisiert werden? Welche Maßnahmen für einen spritsparenden Fahrstil können aufgrund der bisherigen Modellannahmen ergriffen werden? Welche Kompromisse müssen dabei eingegangen werden?

Für leidenschaftliche "Schnellfahrer-SchülerInnen" in einer Klasse könnte auch die folgende Anekdote interessant sein, die ich in Anlehnung an die weiterführenden Betrachtungen von Kirchgraber (1994, S. 14) in eine Kurzgeschichte verpackt habe:

¹⁰ <http://de.wikipedia.org/wiki/Kraftstoffverbrauch#PKW>

"Gib doch endlich Gas!"

Als Beifahrer hat man's immer leicht. "Gib doch endlich Gas!", sprudelt es unwirsch aus Sophies Mund auf dem Weg zum Bahnhof. Dabei hat sie sich doch gerade erst heute so bemüht und beeilt, um pünktlich von zu Hause weg zu kommen. "Mist! Ich versäume meinen Zug! Drück auf die Tube, Mama!" Aber Sophies Mutter, die am Steuer sitzt und den Wagen fährt, nimmt die Situation gelassen und versucht zu beruhigen: "Sachte, sachte meine Liebe, es ist doch noch gar nicht so spät. Du hast noch genügend Zeit und erreichst den Zug bestimmt noch! Wie das letzte Mal, weißt du noch?" Und sie fügt noch hinzu: "Bis zum Bahnhof sind es lediglich 10 Kilometer. Außerdem schaden wir der Umwelt, wenn ich zu schnell fahre, merk dir das!" Sophie schüttelt nur den Kopf. Sie kann es nicht glauben. Wie kann es möglich sein, dass man als "Schnellfahrer" die Umwelt mehr belastet, als ein gewöhnlicher Fahrer, wenn man doch viel früher am Ziel ist, oder? Außerdem findet es Sophie merkwürdig, dass ihre Mutter ausgerechnet just in dem Moment an den Kraftstoffverbrauch und die Umwelt denkt. Ihre Angst vor der Polizei und einer saftigen Geldstrafe wegen zu schnellen Fahrens hätte sie ja noch verstanden. Ihre Eltern verdienen gut! Wobei, ganz nebenbei bemerkt, Geschwindigkeitsüberschreitungen bis zu 10 km/h zählen in Österreich schon fast zu Kavaliersdelikten. Aber Sophies Mutter bleibt dabei und verweilt hartnäckig in ihrer stoischen Ruhe. Nach rund zehn Minuten erreichen sie den Bahnhof. Nach einer kurzen Verabschiedung läuft Sophie auf den Bahnsteig. Rechtzeitig und unter lautem Getöse hält der Zug vor den wartenden Fahrgästen. Sophie ist erleichtert, den Zug doch noch zu erwischen und tritt ruhigen Gewissens ihre Zugfahrt an. Doch eine Sache geht ihr nicht aus dem Kopf:

"Je schneller ich fahre, desto schneller bin ich am Ziel, desto kürzer ist meine Fahrzeit, desto kürzer läuft der Motor, desto weniger Kraftstoff verbrauche ich!"

Sophie weiß, dass diese Schlussfolgerung unter vielen Pkw Fahrern eine weit verbreitete Meinung ist. Selbst ihre beste Freundin Carina hat ihr einmal erzählt, dass sie gelegentlich fester in das Gaspedal tritt und Fahrstrecken schneller zurücklegt, um die Umwelt und ihren Geldbeutel weniger zu belasten. Hat Sophies Freundin recht? Oder handelt es sich bei dieser Art von Argumentation doch etwa um einen landläufigen Trugschluss? Sophie will der Aussage ihrer Mutter "schnelles Fahren schadet der Umwelt" auf den Grund gehen und beginnt im Zug nachzudenken. Sie berechnet zunächst die Zeitersparnis Δt , die möglich

wäre, wenn ihre Mutter die Strecke $s = 10 \text{ km}$ bis zum Bahnhof um $\Delta v = 10 \text{ km/h}$ schneller zurücklegen würde:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{s}{v} - \frac{s}{v + \Delta v}$$

Die Auswertung dieser Gleichung für bestimmte Fahrgeschwindigkeiten spricht nicht für den Schnellfahrer, wie Sophie schnell herausfindet:

v in km/h	50	70	90	110	130	150	170	190	210
Δt in min	2	1,07	0,67	0,45	0,33	0,25	0,2	0,16	0,13

Tabelle 2-12: Zeitersparnis für bestimmte Geschwindigkeiten

Diesem Ergebnis stellt Sophie den Kraftstoff-Mehrverbrauch pro 100 km Fahrstrecke gegenüber, wobei sie die Kraftstoffformel aus Modell III anwendet:

$$\Delta B = B(v + \Delta v) - B(v) = (3,6 + 0,00045(v + \Delta v - 35)^2) - (3,6 + 0,00045(v - 35)^2)$$

Bei den derzeit niedrigen Spritpreisen¹¹ möchte Sophie auch noch die "Stundenkosten" für die Zeitersparnis ausrechnen und nach Wiederheimkehr ihrer besten Freundin vorlegen:

v in km/h	50	70	90	110	130	150	170	190	210
Δt in min	2	1,07	0,67	0,45	0,33	0,25	0,2	0,16	0,13
ΔB in l pro 100 km	0,18	0,36	0,54	0,72	0,9	1,08	1,26	1,44	1,62
"Stundenkosten" in €	0,60	2,24	5,39	10,54	18,17	28,75	42,76	60,68	83,00

Tabelle 2-13: Zeitersparnis, Kraftstoff-Mehrverbrauch und Stundenkosten für die Zeitersparnis

Sophie findet dieses Ergebnis verblüffend! Wird sie damit auch Carina zum Nachdenken anregen können?

□

¹¹ 1,109 €; Stand: 3.1.2015, JET-Tankstelle in Linz-Urfahr.

2.4. Modell 4: Physik-basiertes Modell für den Kraftstoffverbrauch eines Pkw

Bislang wurde in den Modellen angenommen, dass sich das Fahrzeug nur auf ebener Strecke (d.h. ohne Bergauf- und Bergabfahrten) mit konstanter Geschwindigkeit v (d.h. mit Beschleunigung $a = 0 \text{ m/s}^2$ bzw. mit konstanter Motordrehzahl f bzw. konstanter Motorleistung P) bewegt. Üblicherweise sind solche Fahrten nur auf langen und geradlinigen Autobahnen, wie man sie aus Deutschland oder Frankreich kennt, möglich. Um ein noch besseres Bild vom absoluten Kraftstoffverbrauch eines Pkw im Alltag zu erhalten, ist es daher notwendig, weitere Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch zu untersuchen, wie sie zum Beispiel Beschleunigungs- und Bremsmanöver als Folge von besonderen Streckencharakteristika (Berg- und Talfahrt, Stop-&-Go-Verkehr im Stau oder Stadtgebiet, etc.) darstellen können.

Detaillierte Modelle, sogenannte *mikroskopische Verbrauchsmodelle* (engl.: *modal-consumption models*) können es ermöglichen, Fragen nach der Abhängigkeit des Verbrauchs von individuellen Fahrstilen hinsichtlich Beschleunigungs-, Brems- und Gangwahlverhalten zu beantworten. Insbesondere kann mit dieser Modellklasse untersucht werden, wie stark Verkehrsstaus und Stop-&-Go-Verkehr den Verbrauch erhöhen und ob lichtsignalisierte Kreuzungen oder Kreisverkehre hinsichtlich des Kraftstoffverbrauchs eine günstigere Knotenpunktregelung erlauben (vgl. Treiber, 2010, S. 276).

Bei der vollständigen Erfassung und Weiterentwicklung einer "neuen" Modelltheorie, aufbauend auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten, erscheint es mir von Vorteil, die SchülerInnen zunächst einmal über einige grundlegende Beziehungen aus der klassischen Mechanik, wie sie im Rahmen des Physikunterrichts besprochen werden, aufzuklären und sie auch im Mathematikunterricht durchzunehmen, wenn gleich in etwas "abgespeckter" Form. Aus eigener Erfahrung weiß ich, dass gerade einfache Zusammenhänge, wie ich sie im Folgenden besprechen möchte, sehr viel dazu beitragen können, das physikalische Verständnis zu fördern und die Schritte der Modellbildung in einem realitätsnahen Mathematikunterricht leichter nachvollziehbar machen. Die Behandlung physikalischer Inhalte, wenngleich auch in groben Zügen, sollte gerade in so realitätsnahen Themen, wie dem Kraftstoffverbrauch eines Pkw, auch im Mathematikunterricht Platz finden, sofern es die Zeit und Geduld der Lehrkraft (und natürlich auch der SchülerInnen) zulassen. Falls die

Schwerpunkte des Mathematikunterrichts anders gewählt wurden oder die zeitlichen Ressourcen dafür nicht zur Verfügung stehen, bietet sich das Thema an, zum Beispiel in einem fächerübergreifenden Projekt mit Physik unterrichtet zu werden.

A) Einstieg in den Unterricht

Zunächst einmal sollten die SchülerInnen versuchen, ein vereinfachtes *Übersichtsdiagramm* zu erstellen, das den augenblicklichen (*instantanen*) Kraftstoffverbrauch, wie man ihn von der "Momentanverbrauchsanzeige" in modernen Autos kennt, mit einem physikalisch basierten Modellansatz verbindet. Das Wissen aus den vorangegangenen Kapiteln soll dabei unterstützend verwendet und weiter vertieft werden. Ein solches Diagramm kann beispielsweise helfen, die Teile eines Autos auf einem Plakat zu kennzeichnen, an denen Reibungen, Widerstandskräfte oder sonstige Verluste auftreten. SchülerInnen sollten anschließend in der Lage sein, den makroskopischen Kraftstoffverbrauch eines Pkw auf mikroskopische Anteile zurückzuführen und mit Hilfe derer zu berechnen. Bei der Erarbeitung und Erstellung eines *Übersichtsdiagramms* geht es primär darum, zu erörtern, wohin die Energie des Kraftstoffs während der Fahrt mit einem Pkw fließt bzw. zu erkennen, wo die meiste Energie als Wärme "verloren" geht, um sich anschließend mit dem nötigen Formelwerk näher auseinandersetzen zu können. Das *Übersichtsdiagramm* könnte zum Beispiel so gestaltet werden:

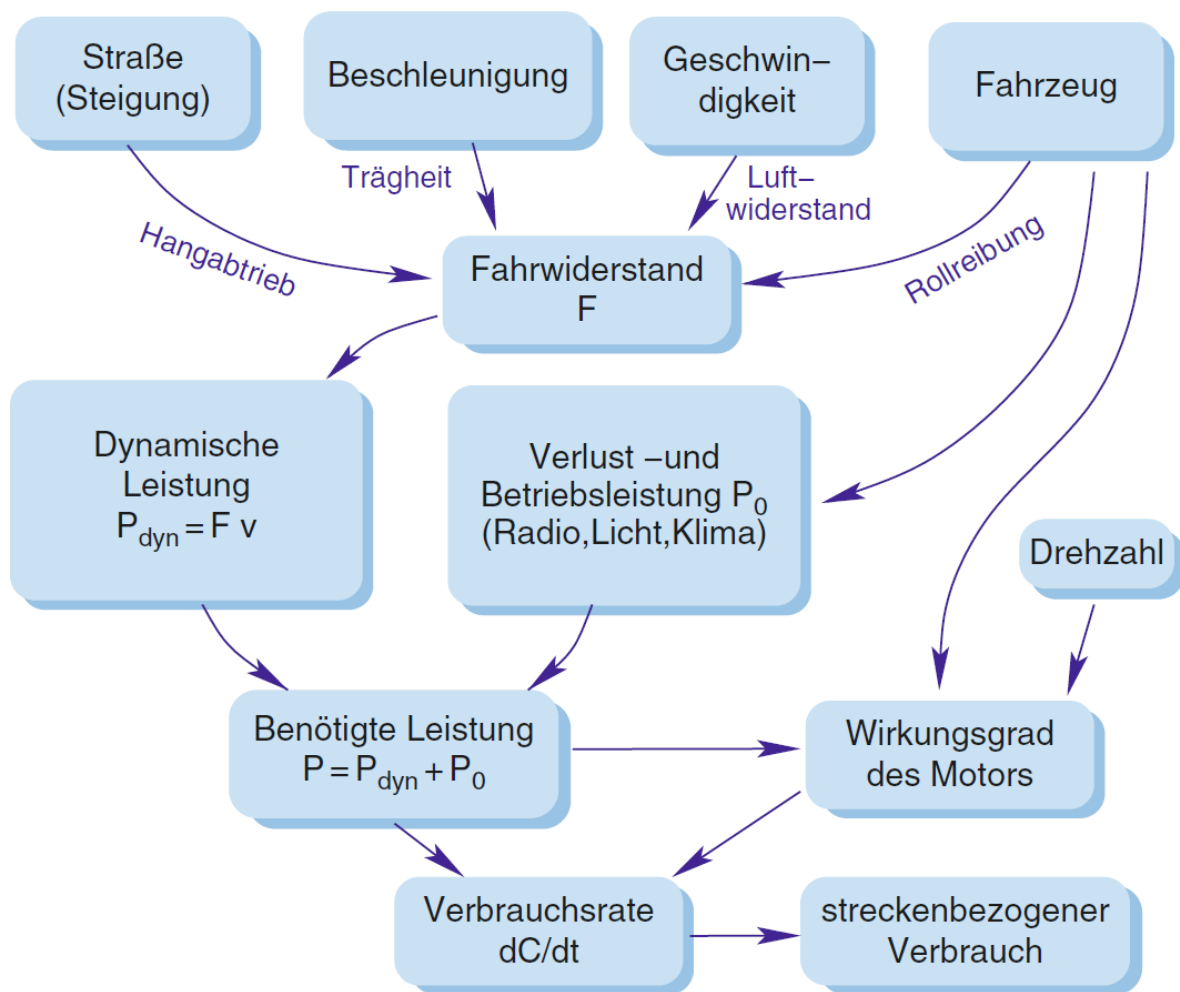


Abbildung 2-11: Übersichtsdiagramm zur Veranschaulichung des instantanen Kraftstoffverbrauchs (vgl. Treiber, 2010, S. 277)

Wie aus **Abbildung 2-11** hervorgeht, setzt sich der gesamte Fahrwiderstand F aus der Summe vierer kleiner Widerstandskräfte zusammen, von denen der Luftwiderstand, die Rollreibung und der Wirkungsgrad des Motors bereits besprochen wurden. In den nachfolgenden Unterkapiteln möchte ich nochmals zu allen hauptbeitragenden Kraftarten Stellung nehmen, ihre theoretischen Hintergründe aufzeigen und Wege vorstellen, wie sie für Lehrkräfte lehr- und für SchülerInnen lernbar gemacht werden können.

B) Mathematisierung und Modellbildung

2.4.1. Die Luftwiderstandskraft

Die Luftwiderstandskraft F_L wird aus der Luftdichte ρ , dem Luftwiderstandsbeiwert c_w (im wesentlichen abhängig von der Bauform des Fahrzeuges), der in Bewegungsrichtung

projizierten Stirn- bzw. Querschnittsfläche A und der Relativgeschwindigkeit v von Fahrzeug und Luft ermittelt. An dieser Stelle meiner Arbeit möchte ich nochmals auf **Kapitel 2.2.** (S. 26 ff) verweisen, in dem bereits eine physikalische Begründung der Formel für den Luftwiderstand

$$F_L = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

abgehandelt wurde. Die folgende Tabelle zeigt einige typische Luftwiderstandsbeiwerte eines Pkw (vgl. Reif, 2011, S.142):

Fahrzeugbauform	c_w -Wert
Pkw als offenes Kabriolett	0,5 bis 0,7
Pkw mit Kastenaufbau	0,5 bis 0,6
Pkw mit Stufenheck (<i>Pontonform</i>)	0,4 bis 0,55
Pkw in Keilform	0,3 bis 0,4
Pkw in verkleideter Form	0,2 bis 0,25
Pkw in Tropfenform	0,15 bis 0,2

Tabelle 2-14: Luftwiderstandsbeiwerte verschiedener Pkw-Typen

Anmerkung: Im Idealfall (Ruhezustand) besitzt ein kleiner Flüssigkeitstropfen eine Kugelform. Als *Tropfenform* bezeichnet man die Form, welche ein kleiner Flüssigkeitstropfen während des Entstehungsvorganges, z.B. bei der Ablösung von einer größeren Flüssigkeitsmenge, annimmt. Im Deutschen Technikmuseum in Berlin kann heute noch der *Rumpler Tropfenwagen* aus dem Jahre 1921 besichtigt werden:

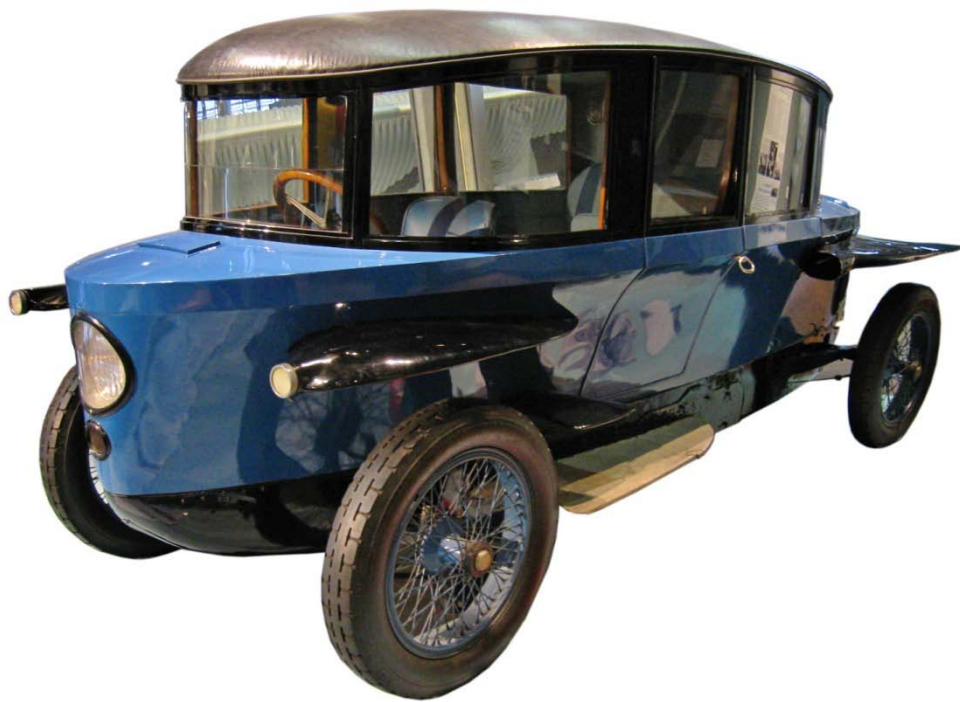


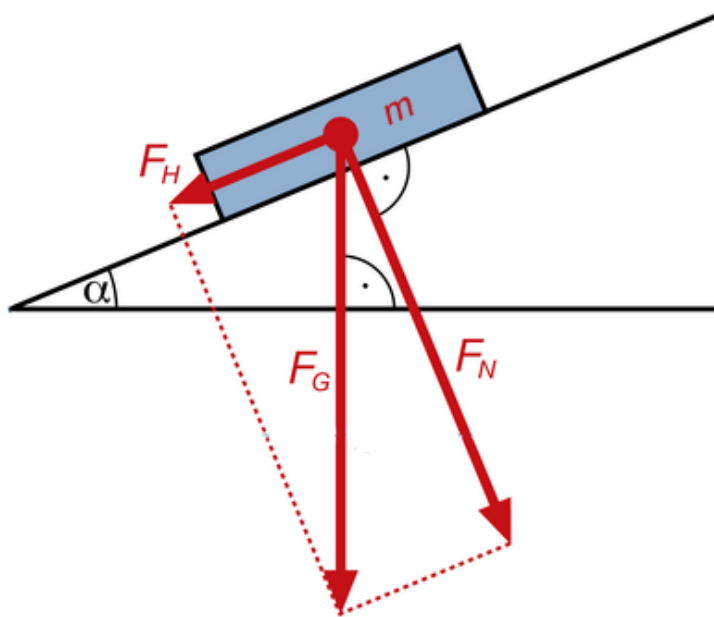
Abbildung 2-12: Rumberg Tropfenwagen im Technikmuseum Berlin

Allerdings hat sich – alleine aus ästhetischen Gründen – diese Autobauform bis heute nicht durchsetzen können, wenngleich sie den besten c_w -Wert aufweist.

2.4.2. Die Hangabtriebskraft

Wenn man davon ausgeht, dass Straßen für gewöhnlich bergauf und bergab führen, so muss in einem verfeinerten Modell auch die *Hangabtriebskraft* F_H berücksichtigt werden. Sie beschreibt die Komponente der *Gewichtskraft* F_G eines Körpers, die auf einer schiefen Ebene hangabwärts gerichtet ist.¹² Zur Illustration dient das skizzierte einfache Beispiel eines Klotzes mit der Masse m auf einer um den Winkel α höhenverstellbaren Platte:

¹² siehe Wikipedia, 2014: <http://de.wikipedia.org/wiki/Hangabtriebskraft>



Bezeichnungen:

F_H ... Hangabtriebskraft

F_G ... Gewichtskraft

F_N ... Normalkraft

F_H ... Hangabtriebskraft

α ... Steigungswinkel

m ... Masse des Klotzes

Abbildung 2-13: Kräfte diagramm eines Klotzes auf einer schiefen Ebene¹³

Derartige *Kräfte diagramme* sind in der Physik bewährte Hilfsmittel zur Herleitung mathematischer Zusammenhänge. Kräfte entsprechen in der Mathematik Vektoren bzw. graphisch dargestellten "Pfeilen". Interessiert man sich nur für die Länge dieser Pfeile, so bildet man ihre Beträge und behandelt sie wie Skalare/Strecken. Bei näherer Betrachtung von **Abbildung 2-13** kann man die trigonometrischen Beziehungen

$$F_H = F_G \sin(\alpha)$$

$$F_N = F_G \cos(\alpha)$$

erkennen. Diese Gleichungen können in der Schule anschaulich mit Hilfe eines *Einheitskreises* und den dafür bestimmten Definitionen für Sinus und Cosinus an der Tafel anschaulich demonstriert werden. Folgende beide Extremfälle sind relevant:

- Falls die Ebene "horizontal" liegt ($\alpha = 0^\circ$), dann entspricht die Normalkraft F_N exakt der Gewichtskraft F_G und die Hangabtriebskraft F_H verschwindet, weil $\cos(0^\circ) = 1$ und $\sin(0^\circ) = 0$ gelten muss.

¹³ bearbeitete Graphik aus dem Internet:
<http://de.wikipedia.org/wiki/Hangabtriebskraft#mediaviewer/File:Schiefe-Ebene.png>

- Falls die Ebene "vertikal" liegt ($\alpha = 90^\circ$), dann entspricht die Hangabtriebskraft F_H exakt der Gewichtskraft F_G und die Normalkraft F_N verschwindet, weil $\sin(90^\circ) = 1$ und $\cos(90^\circ) = 0$ gelten muss.

"Steigungen" und "Steigungswinkel" im Straßenverkehr

Die Steigung von Straßen wird in der Regel in Prozent auf Verkehrsschildern angegeben (vgl. [Abbildung 2-14](#)). Eine Steigung von 10% bedeutet zum Beispiel, dass pro 100 Meter waagrechter Entfernung die Höhe um 10 Meter zunimmt.



Abbildung 2-14: Verkehrsschild¹⁴

Beispiel: Welchem Winkel α entspricht eine Straßensteigung von 10%?

Lösungsvorschlag:

Dazu halte man sich ein rechtwinkeliges Dreieck und die Definitionen der drei trigonometrischen Funktionen vor Augen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{G}{H} \\ \cos(\alpha) &= \frac{A}{H} \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{G}{H}}{\frac{A}{H}} = \frac{GH}{AH} = \frac{G}{A} \end{aligned}$$

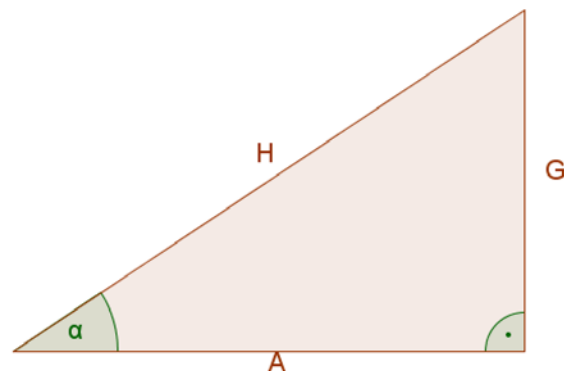


Abbildung 2-15: Rechtwinkeliges Dreieck

Die letzte der drei Beziehungen entspricht genau der Definition der Steigung:

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A} = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{waagrechte Entfernung}} = \text{Steigung} = k$$

¹⁴ http://www.upps.at/shop/popup_image.php?plD=3190&imgID=0&XTCsid=

Zu beachten ist, dass die Angabe der Steigung in Prozent noch durch 100 dividiert werden muss! Damit erhält man für eine Straße mit 10% Steigung einen Höhenwinkel von ungefähr

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10}{100}\right) \approx 5,71^\circ$$

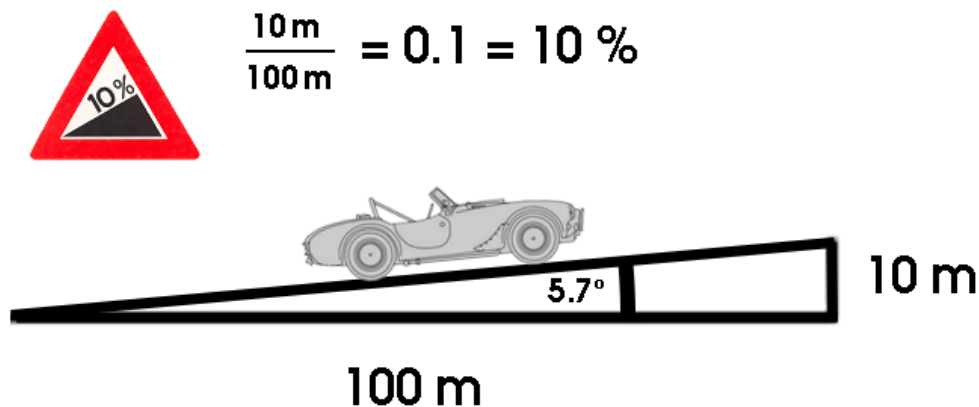


Abbildung 2-16: Begriffsbildung "Steigung" und "Steigungswinkel"¹⁵

Hinweis: Bei der Berechnung von Winkel in (Alt-)Grad muss beachtet werden, dass die Einstellung "Degree" bzw. "Grad" auf dem Taschenrechner gewählt wird, um ein korrektes Ergebnis zu erhalten. Die Einstellung "Radian" bzw. "Bogenmaß" berechnet das *Bogenmaß* eines Winkels. Eine falsche Einstellung am Taschenrechner führt bei SchülernInnen häufig zu fehlerhaften Winkelberechnungen! Deshalb sollte bei der Behandlung von trigonometrischen Funktionen im Unterricht die korrekte Vorgehensweise mit dem Taschenrechner ausführlich besprochen werden.

□

Näherung für kleine Steigungswinkel α - "Kleinwinkelnäherung"

Für kleine Winkel α in Radian (d.h. kleiner Höhenunterschied, große waagrechte Entfernung) kann die Näherung

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha \approx k$$

benutzt werden. In diesem Fall vereinfacht sich die Gleichung für die Hangabtriebskraft zu

¹⁵ <http://de.wikipedia.org/wiki/Prozent>

$$F_H = F_G \sin(\alpha) \approx F_G k$$

Auf ansteigenden Straßen gilt stets $k > 0$, auf Gefällestrecken entsprechend $k < 0$, wobei immer $-1 \leq k \leq 1$ gelten muss! Eine Straße mit 100% Steigung würde demnach einer Ebene entsprechen, die um den Winkel $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{100\%}{100}\right) = 45^\circ$ (und nicht etwa um 90° , wie oft fälschlicherweise angenommen wird) zur Horizontalen geneigt ist!

Um die Formel für die Hangabtriebskraft zu vervollständigen, ist noch ein brauchbarer Ausdruck für die *Gewichtskraft* F_G erforderlich. Sie ist die physikalische Kraft, die das Auto aufgrund der Erdanziehungskraft (*Gravitation*) erfährt und errechnet sich aus dem zweiten *Newtonschen Gesetz*, das lautet:

*"Die Änderung der Bewegung ist der
Einwirkung der bewegenden Kraft
proportional und geschieht nach der
Richtung derjenigen geraden Linie, nach
welcher jene Kraft wirkt." (aus Newtons
"Philosophiae Naturalis Principia
Mathematica", 1687)*



Abbildung 2-17: Sir Isaac Newton (1643 - 1727) nach einem Kupferstich (vgl. Tipler, 1994, S. 71)

Formal wird dieser Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegungsänderung als $F_G \sim g$ ausgedrückt, wobei F_G die zu berechnende Gewichtskraft des Autos und g die Erdbeschleunigungskonstante ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) darstellt. Im Verlauf der Geschichte stellte sich aber bald heraus, dass der Proportionalitätsfaktor genau die Masse m bedeutet und man erhält die erstmals von *Leonard Euler* 1750 formulierte, abgewandelte Grundgleichung der Mechanik:

$$F_G = mg$$

und damit die vollständige Formel zur Berechnung der Hangabtriebskraft:

$$F_H = mg \sin(\alpha) \approx mgk$$

2.4.3. Die Rollwiderstandskraft

Bei der Roll- oder Festkörperreibung handelt es sich in der Physik um die Kraft, welche beim Abrollen eines Rades entsteht und gegen die Bewegungsrichtung des Autos wirkt. Sie ist näherungsweise geschwindigkeitsunabhängig und proportional zur Normalkraft F_N des bewegten Körpers. Ich schreibe dafür

$$F_R = c_r F_N$$

mit dem dimensionslosen Proportionalitätsfaktor c_r . Er wird auch als *Rollwiderstandsbeiwert* oder *Rollreibungsbeiwert* bezeichnet und setzt sich aus dem Verhältnis der Länge d der Kontaktfläche mit dem Boden und dem Radius r des Reifens zusammen, kurz $c_r = \frac{d}{r}$ (siehe [Abbildung 2-17](#)).

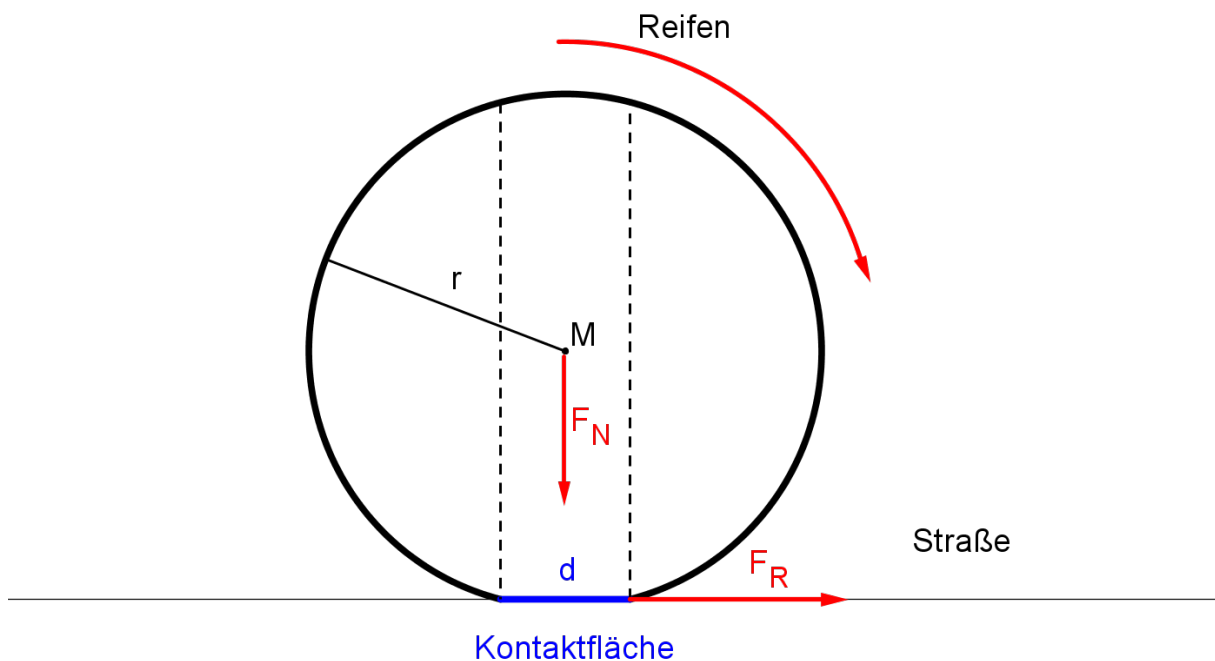


Abbildung 2-18: Schematische Darstellung eines abrollenden Reifens

Durch die Normalkraftkomponente F_N wird der abrollende Reifen mit Mittelpunkt M und Radius r gegen die Stra e gedr ckt; es entsteht eine Kontaktfl che der L nge d , welche sich, neben dem Reifenradius selbst, unmittelbar auf den Rollwiderstandsbeiwert c_r auswirkt.

Beispiel: Welche Vor- und Nachteile bezüglich des Rollwiderstandes ergeben sich für stark und weniger stark aufgepumpte Autoreifen? Spielt der Reifendurchmesser für den Rollwiderstand eines Fahrzeuges eine Rolle? Wenn ja, welche? Welchen Einfluss hat das Reifenprofil auf den Rollwiderstand eines Fahrzeuges?

Lösungsvorschlag:

- Zur Erklärung benutzt man am besten die Formel $c_r = \frac{d}{r}$. Für einen "voll aufgepumpten" Reifen verringert sich der Rollwiderstandsbeiwert, da die Kontaktlänge d zwischen Reifen und Asphalt kleiner wird (d.h. der höhere Luftdruck im Reifen bewirkt, dass der Reifen nur wenig eingedrückt wird), der Reifenradius r bleibt konstant. Deshalb gilt bei glattem Untergrund: Je höher der Reifendruck, desto geringer ist die Verformung und damit der Rollwiderstand des Fahrzeuges.
- Im Gelände ist es genau umgekehrt: Je geringer der Luftdruck der Reifen ist, desto geringer ist der Rollwiderstand. Dies gilt für weiche Wald- und Wiesenböden genauso, wie für harte Schotterstraßen. Der Grund liegt darin, dass ein Reifen bei weniger Druck die Unebenheiten besser ausgleichen kann, d.h. er sinkt weniger stark ein und das gesamte Auto wird durch die Unebenheiten weniger gebremst. Dieser Sachverhalt ist wahrscheinlich den meisten SchülernInnen vom Radfahren am Strand bekannt, wo es besonders anstrengend ist. Andererseits verschlechtert sich jedoch mit niedrigem Reifendruck das Kurvenfahren erheblich, da sich die *Haftreibung* des Pkw zur Straße verändert. Deshalb sollte auch gelegentlich vor Fahrtantritt der Druck aller vier Reifen kontrolliert werden!
- Aus obiger Formel folgt unmittelbar, dass Reifen mit einem kleinen Radius bei gleichem Luftdruck einen höheren Rollwiderstand haben als große. Dies ist auch damit zu erklären, dass sich die Reifenverformung (das sogenannte *Walking*) im Verhältnis stärker auswirkt. Der Reifen läuft "unrunder". Außerdem können Unebenheiten auf der Straße und im Gelände stärker wettgemacht werden. Besonders im *Mountain-Bike* Bereich setzt man daher verstärkt auf 29 Zoll anstatt der üblichen 26 oder 28 Zoll Laufräder.
- Grundsätzlich kann man sagen, dass Reifen mit einem feinen Profil "leichter" rollen als welche mit einem groben, da sich Profile mit großen Zwischenräumen oder Stollen ungünstig auf den *Rollwiderstandsbeiwert* c_r auswirken. □

Für Autoreifen kann der entsprechende c_r -Wert aus einer für verschiedene Materialpaarungen zutreffenden Tabelle entnommen werden. Der Rollreibungsbeiwert eines Autoreifens hängt, neben Radius und Kontaktlänge, im Allgemeinen von vielen anderen Faktoren, wie beispielsweise von der Oberflächenbeschaffenheit der Straße, Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Breite, Luftdruck, Aufbau und Profil der Reifen ab, sodass die Tabellenwerte nur gute Näherungswerte darstellen.

Wälzkörperpaarung	c_r -Wert
Kugellager, Kugel und Lager aus gehärtetem Stahl	0,0005 – 0,001
Eisenbahnrad auf Schiene	0,001 – 0,002
Motorradreifen auf Asphalt	0,015 – 0,02
Lkw-Reifen auf Asphalt	0,006 – 0,01
Pkw-Reifen auf Asphalt	0,011 – 0,015
Autoreifen auf Beton	0,01 – 0,02
Autoreifen auf Schotter	0,02
Autoreifen auf Kopfsteinpflaster	0,015 – 0,03
Autoreifen auf Schlaglochstraße	0,03 – 0,06
Autoreifen auf Erdweg	0,05
Autoreifen auf festgefahretem Sand	0,04 – 0,08
Autoreifen auf losem Sand	0,2 – 0,4

Tabelle 2-15: c_r -Werte von Wälzkörperpaarungen¹⁶

Für Pkw-Reifen auf trockener Straße liegt der c_r -Wert in der Gegend von 0,011 bis 0,015 und ist damit deutlich niedriger als der entsprechende *Gleitreibungskoeffizient* (das ist auch der Grund, warum bei drehenden Achsen "echte" Kugellager Gleitlagern vorzuziehen sind!). Auf losem Sand kann er sich aber auch zwischen 0,2 und 0,4 bewegen. Entscheidend für die richtige Wahl von c_r ist auch die Feuchtigkeit auf der Straße! In den kalten Wintermonaten vergrößert sich der *Rollwiderstandsbeiwert* aufgrund von Schnee und Matsch erheblich. Dabei auftretende, physikalische Phänomene lassen sich unter dem Sammelbegriff *Mischreibung* zusammenfassen und werden im Folgenden nicht weiter besprochen.

¹⁶ bearbeitete Tabelle aus dem Internet:
<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Rollwiderstand&redirect=no>

Gleitreibung

Bei Reibungsvorgängen wird prinzipiell zwischen *Haft-* und *Gleitreibung* unterschieden. Gleitvorgänge, die während des Abrollens eines Gummireifens auftreten können, werden als *Schlupf* bezeichnet. Ein antreibender oder abbremsender Autoreifen hat gegenüber der Oberfläche, auf der er rollt, immer einen kleinen *Schlupf*, d.h. auf nassen oder unbefestigten Straßen oder Feldwegen kann es vorkommen, dass die Reifen durchdrehen. Es entsteht *Reibungswärme* zwischen Reifen und Straße, die sich in Form von Rauchentwicklung äußert und ebenfalls einen Einfluss auf den Kraftstoffverbrauch hat.



Abbildung 2-19: Rauchentwicklung durch Reibungswärme

Die *Gleitreibung* ist, verglichen mit der *Haftreibung*, meistens kleiner. Dieses Phänomen kann leicht an einem kalten Wintertag mit dem Auto auf einem leeren Parkplatz überprüft werden: Bei einer Kurvenfahrt mit langsamer Geschwindigkeit ist es problemlos möglich, das Auto zu rangieren. Sobald jedoch die Geschwindigkeit erhöht und der Punkt maximaler *Haftreibung* überschritten wird, beginnt das Fahrzeug zu übersteuern und lässt sich nur noch schwer kontrollieren. Überdies hinaus kann beim schnellen Losfahren beobachtet werden, dass bei steigender *Tangentialkraft* des Reifens (Gaspedal immer weiter durchgedrückt) der *Schlupf* zunächst schwach, danach aber immer stärker zunimmt. Vielen AutofahrernInnen ist nicht bewusst, dass beim Zurücknehmen des Gaspedals der *Schlupf* wieder abnimmt,

wodurch beim Bergauf-Wegfahren auf glatter Fahrbahn ein Durchdrehen der Reifen manuell verhindert werden kann.

Die Beiträge des *Schlupfes* zum instantanen Kraftstoffverbrauch eines Pkw sind äußerst gering! Daher möchte ich in den nachfolgenden Berechnungen davon ausgehen, dass Beschleunigungs- und Bremsvorgänge immer so durchgeführt werden, dass der Kontakt zwischen Autoreifen und Straße zu 100% gewährleistet ist und keine Energieverluste durch Wärmeentwicklung durchdrehender Räder (siehe [Abbildung 2-19](#)) auftreten.

2.4.4. Die Trägheitskraft

Das *Trägheitsprinzip* besagt, dass jeder Körper bestrebt ist, entweder in seinem Ruhezustand zu verharren oder seinen Bewegungszustand beizubehalten. Um eine Änderung des jeweiligen Zustandes herbeizuführen, muss eine Kraft auf den Körper einwirken bzw. übertragen werden. Versucht man beispielsweise in einer engen Kurve bei Glatteis zu bremsen, rutscht das Auto geradeaus weiter, ohne merklich langsamer zu werden oder auf Lenkbewegungen zu reagieren. Ein Hauptgrund dafür ist, dass auf vereisten Straßen nur sehr geringe Reifenkräfte übertragen werden können. Die *Trägheitskraft* ist also eine bewegungsunabhängige Größe eines jeden Körpers und hängt u.a. von seiner Masse ab. Ohne *Trägheit* wäre es zum Beispiel nicht möglich, ein Blatt Papier sehr schnell unter einem mit Wasser gefüllten Glas herauszuziehen, ohne dabei das Glas zu bewegen und Wasser zu verschütten. Personen in einem fahrenden Auto würden ohne *Trägheit* bei einem Frontalzusammenstoß mit einem Hindernis nicht aus ihren Sitzen heraus nach vorne geschleudert werden.

Die *Trägheitskraft* eines Autos spielt bei Brems- und Beschleunigungsvorgängen und folglich für den Kraftstoffverbrauch eine zentrale Rolle. Damit ein Fahrzeug mit der Masse m konstant mit a beschleunigt werden kann, ist eine Kraft $F = ma$ erforderlich (Hauptgleichung der *klassischen Mechanik*). Wenn das Fahrzeug gleichmäßig beschleunigt wird, d.h. seine Beschleunigung zeitunabhängig ist ($a(t) = a$), dann nimmt seine Geschwindigkeit linear mit der Zeit zu ($v(t) = at$). In diesem Fall kann in obigem Ausdruck für die Kraft die Beschleunigung a durch den Ausdruck $\frac{v}{t}$ ersetzt werden. Allgemein kann die

Kraft, die zur Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers mit der Masse m notwendig ist, mit Hilfe der Gleichung

$$F = m \frac{v}{t}$$

berechnet werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel: Bei Renn- und Sportwägen werden für gewöhnlich Leergewichte und Beschleunigungszeiten (meistens in Sekunden für Geschwindigkeiten von 0 auf 100 km/h) angegeben. Ein *Ferrari Enzo* beispielsweise besitzt ein Leergewicht von 1,365 Tonnen und beschleunigt in nur 3,27 Sekunden von 0 auf 100 km/h.



Abbildung 2-20: Ferrari Enzo¹⁷

Aufgabenstellungen:

- a) Wie groß ist die durchschnittliche Beschleunigung a des *Ferrari*?
- b) Welche konstante Kraft wirkt auf einen Fahrer mit einem Gewicht von 80 kg?
- c) Welche konstante Kraft ist für den Beschleunigungsvorgang erforderlich?
- d) Welche Beschleunigungsarbeit wird verrichtet?
- e) Welche konstante Leistung ist erforderlich, um den *Ferrari* von 0 auf 100 km/h in der vorgegebenen Zeit zu beschleunigen?

Lösungsvorschlag:

zu a) Nach Umrechnung der Geschwindigkeit in die erforderliche Einheit m/s

$$100 \text{ km/h} \equiv \frac{100}{3,6} \text{ m/s} \approx 27,78 \text{ m/s}$$

¹⁷ <http://demo.premopress.com/wpautomall/items/ferrari-enzo/#optionalCustomIdentifier>

und mit Hilfe der Beziehung $a = \frac{v}{t}$ erhält man für die durchschnittliche Beschleunigung a des Ferraris

$$a = \frac{27,78}{3,6} \approx 7,72 \text{ m/s}^2$$

Die Geschwindigkeit des Ferraris nimmt also im Mittel pro Sekunde um 7,72 Meter pro Sekunde zu. Verglichen mit der Beschleunigung, die ein Körper im freien Fall auf der Erde erfährt ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$), ist dieser Wert zwar etwas kleiner, aber dennoch beachtlich groß!

zu **b)** Auf einen Fahrer mit 80 kg Körpergewicht wirkt eine konstante Kraft von

$$F = 80 \text{ kg} * 7,72 \text{ m/s}^2 = 617,6 \text{ N}$$

Diese Kraft entspricht auf der Erde einer Gewichtskraft von ungefähr 62 kg.

zu **c)** Nach Umrechnung des Leergewichts von Tonnen in Kilogramm

$$1,365 \text{ T} \equiv 1,365 * 1000 \text{ kg} = 1365 \text{ kg}$$

und unter Verwendung des Teilergebnisses aus **a)** und der Beziehung $F = ma$ erhält man für die aufgewandte Kraft

$$F = 1365 * 7,72 = 10537,8 \text{ N} \equiv 10,5 \text{ kN}$$

zu **d)** Aus der Physik weiß man, dass die Beschleunigungsarbeit eines Körpers seiner *kinetischen Energie* entspricht, wenn sich dieser zu Beginn in Ruhe ($v(0) = 0$) befunden hat. Für einen Körper der Masse m , der aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v beschleunigt wird, ist demnach eine Beschleunigungsarbeit von $W_B = E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ notwendig. Unter Verwendung dieser Beziehung erhält man für die benötigte Beschleunigungsarbeit

$$W_B = \frac{1}{2} * 1365 * 27,78^2 \approx 526705 \text{ J} \equiv 526,7 \text{ kJ}$$

Diese Arbeit/Energie wird vom Ferrari in nur etwa drei Sekunden aufgewendet. Zum Vergleich: Mit dieser Energie kann man im Schnitt $\frac{526705 \text{ Joule}}{100 \text{ Watt}} : 3600 \text{ s} \approx 1,5 \text{ Stunden}$ fernsehen bzw. eine 10 Watt Leuchtdiode $\frac{526705 \text{ Joule}}{10 \text{ Watt}} : 3600 \approx 15 \text{ Stunden}$ betreiben!

zu e) "Leistung = Arbeit pro Zeit". Dividiert man die Beschleunigungsarbeit W_B durch die Beschleunigungszeit von 3,27, so erhält man die durchschnittliche Leistung des Ferraris beim Beschleunigen von 0 auf 100 km/h zu

$$P_B = \frac{W_B}{t} = \frac{526705}{3,27} \approx 161072 \text{ Watt} \cong 161 \text{ kW}$$

Dieses Ergebnis entspricht einer durchschnittlichen Motorleistung von

$$161 * 1,35 = 217,35 \text{ PS}$$

□

Wie man aus diesem Beispiel und der Formel $F = ma$ gut erkennen kann, spielt also die *Trägheit* eines Autos bei Beschleunigungsvorgängen, wie man sie nach roten Ampeln und in Stausituationen erlebt, für den Kraftstoffverbrauch eine bedeutende Rolle. Da in der Regel bei Bremsvorgängen keine nutzbare Energie zurückgewonnen werden kann (Ausnahmen hierfür bilden sogenannte *Hybrid-* und *Elektrofahrzeuge*), erhöhen Stop-&-Go-Fahrzyklen unweigerlich den absoluten Verbrauch.

Bemerkung: Bislang wurde nur die *Trägheitskraft* des *Gesamtsystems* "Auto" betrachtet. In der Praxis treten aber auch noch *Rotationsträgheitskräfte* an den Reifen, den drehbaren Motorteilen und den Achsen auf, welche entgegen der Rollrichtung wirken. Allerdings sind deren Beiträge zur gesamten Fahrwiderstandskraft so gering, dass sie in den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden können.

2.4.5. Elektrische Verlustleistungen eines Pkw

In den bisherigen Ausführungen wurden folgende mechanische "Kraftanteile" berücksichtigt:

- Luftwiderstandskraft: $F_L = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$
- Hangabtriebskraft: $F_H = mg \sin(\alpha) \approx mgk$
- Rollwiderstandskraft: $F_R = c_r F_N = c_r mg \cos(\alpha)$
- Trägheitskraft: $F_T = ma$

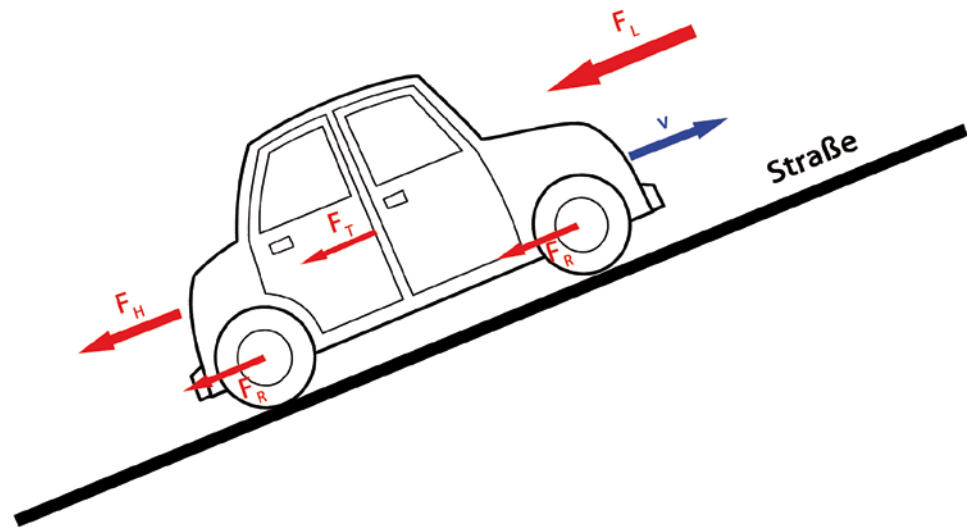


Abbildung 2-21: Kräfte diagramm eines Pkw auf einer schiefen Ebene¹⁸

Alle diese Kräfte wirken sich nur auf den Fahrwiderstand F aus. Die Frage ist nun, welchen Einfluss die Inbetriebnahme von elektrischen Geräten auf den Gesamtverbrauch hat. Bislang blieben sie ja in der Modellrechnung zur Gänze unberücksichtigt. Die erkenntnisreiche Antwort lautet: Für den Kraftstoffverbrauch spielen elektrische Geräte sehr wohl eine Rolle, da der "Strom" (eigentlich die *elektrische Energie*), den sie benötigen, von der "Autobatterie" (eigentlich *Autoakkumulator*) stammt, die als Zwischenspeicher für die *elektrische Energie* im Auto dient und von der *Lichtmaschine* (Generator zur Erzeugung von *elektrischer Energie*) im Auto während der Fahrt aufgeladen wird, welche wiederum über einen Keilriemen mechanisch mit dem Motor verbunden ist und von diesem angetrieben wird. Die benötigte *elektrische Energie* stammt also indirekt vom Verbrennungsmotor, der entsprechend mehr Kraftstoff verbrennen muss, je höher der Bedarf an *elektrischer Energie* ist, also je mehr Elektrogeräte während der Fahrt eingeschaltet sind. Deshalb sind die zusätzlich anfallenden *elektrischen Betriebsleistungen* bei der Berechnung des Kraftstoffverbrauchs nicht zu vernachlässigen! Ich bezeichne sie mit P_0 . Die vom Motor zur Verfügung gestellte, effektive Leistung P teilt sich dann im Wesentlichen in die zwei Anteile P_0 und P_{dyn} auf, wobei P_{dyn} dem mechanischen Leistungsanteil, der benötigt wird, um den Fahrwiderstand F zu überwinden und P_0 dem Grundleistungsbedarf (geschwindigkeitsunabhängig) entspricht. Aus der Physik weiß man, dass das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit der erbrachten Leistung entspricht. Mathematisch ausgedrückt ergibt sich dafür die Gleichung:

¹⁸ bearbeitete Graphik aus dem Internet: <https://www.heilpaedagogik-info.de/ausmalbilder/autos.html>

$$P_{dyn} = Fv$$

wobei F der Summe aller geschwindigkeitsabhängigen und -unabhängigen Fahrwiderstandskräfte und v der Fahrzeuggeschwindigkeit entspricht.

Viele Autohersteller legen großen Wert auf die Sonderausstattung ihrer Fahrzeuge, die für bestmöglichen Komfort bei den Kunden sorgen soll. Werbungen über Autos mit Klimaanlage, elektronischen Fensterhebern, Regensensoren, Sitzheizung etc. locken potentielle AutokäuferInnen in nahegelegene Autohäuser und sollen die Anzahl an Neuzulassungen, welche seit den letzten Jahren stagniert,¹⁹ wieder in die Höhe treiben. Die Frage ist nur, welche Grundausstattung man tatsächlich beim Autofahren im Alltag benötigt oder auf welche gar verzichtet werden kann? An dieser Stelle des Unterrichts sollte von den SchülerInnen überlegt werden, welche elektrischen Geräte einen großen und welche einen eher geringen Anteil zum Mindestleistungsbedarf P_0 eines Autos beitragen und auf welche vielleicht sogar verzichtet werden kann. Nach Treiber (2010, S. 278 f) setzt sich der Mindestleistungsbedarf P_0 eines Pkw im Wesentlichen zusammen aus dem Leistungsbedarf

- durch Licht, Klimaanlage, Radio, Heizung, etc.
- diverser Nebenaggregate und Stellmotoren (Scheibenwischer, Servolenkung, Bremsverstärkerpumpe, elektrische Fensterheber, Lüftungsventilatoren, etc.)
- verschiedenster elektrischer Verluste (Cockpit-Anzeigen und Beleuchtungen im Inneren des Fahrzeugs)
- der zur Überwindung der inneren Motorreibung im Leerlaufbetrieb benötigt wird.

Die Aufgabe der SchülerInnen kann es nun sein, Leistungen (in Watt) für genannte elektrische Geräte und Nebenaggregate abzuschätzen. Je nach Sonderausstattung und Verwendung elektrischer Geräte während der Fahrt können unterschiedliche Werte für die Betriebsleistung P_0 eines Pkw herauskommen. Für die anschließenden Betrachtungen schätze ich den Mindestleistungsbedarf (ohne Klimaanlage!) mit $5 \text{ kW} \equiv 5000 \text{ W}$ ab.

¹⁹ vgl. *Neues Volksblatt*, Ausgabe vom 15.1.2015, S. 21.

2.4.6. Formel für den effektiven Leistungsbedarf

Die SchülerInnen sind nun in der Lage, alle bisher berücksichtigten Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch in einer ersten Formel für den effektiven Leistungsbedarf zusammenzutragen:

$$P(v, a) = P_{dyn} + P_0$$

mit

$$P_0 = \text{Mindestleistungsbedarf in Watt}$$

$$P_{dyn}(v, a) = Fv = (F_L + F_H + F_R + F_T)v$$

und den jeweiligen Ausdrücken für die Fahrwiderstandskräfte. Es fällt auf, dass unter bestimmten Bedingungen $P_{dyn} < 0$ und $|P_{dyn}| > P_0$ und folglich $P(v, a) < 0$ gelten muss! Es kann also "überschüssige" Leistung bei der Fahrt mit dem Pkw auftreten, die zur "Erzeugung" von Energie führen würde. Dieser Ansatz funktioniert aber nur für sogenannte *Hybrid-* oder *Elektrofahrzeuge*. Sie sind in der Lage, überschüssige kinetische Energie wieder in elektrische Energie umzuwandeln (*Rekuperation*). Dies kann beispielsweise beim Bergabfahren oder bei Bremsvorgängen geschehen. Die Abnahme der kinetischen Energie bewirkt eine Gewinnung potentieller elektrischer Energie, welche wieder in einem Akku gespeichert werden kann.

Da es bei herkömmlichen Fahrzeugen mit Verbrennungsmotor de facto unmöglich ist, kinetische Energie wieder in Benzin oder Diesel umzuwandeln, wird sich in der Regel auch der Tank eines Fahrzeuges beim Bremsen nicht wieder auffüllen. Moderne Pkw besitzen aber oftmals die Funktion, die Kraftstoffzufuhr zum Motor abzuschalten (*Schubabschaltung*), falls die Board-Elektronik erkennt, dass das Fahrzeug im Schlepptau (mit *Motorbremse*) betrieben wird. Im besten Fall sinkt hierbei der Verbrauch auf null. Die Formel für den effektiven Leistungsbedarf eines Pkw kann dann wie folgt modifiziert werden (vgl. Treiber, 2010, S. 279):

$$P(v, a) = \text{Max}\{P_{dyn} + P_0, 0\}$$

Die Maximum-Bedingung bringt die oben beschriebene Unmöglichkeit der Energierückgewinnung von Verbrennungsmotoren bei Verzögerungsvorgängen zum Ausdruck. Dementsprechend einfach kann die Leistungsformel für noch ältere

Verbrennungsfahrzeuge (ohne *Schubabschaltung*) modifiziert werden. Bei ihnen fällt ein P_0 entsprechender Verbrauch immer an:

$$P(v, a) = P_0 + \text{Max}\{P_{dyn}, 0\}$$

Beispiel: Herr Maier ist der Meinung, dass man beim Bergabfahren im Leerlauf statt mit Motorbremse, wenngleich es die Bremsen mehr abnützt, weniger Kraftstoff benötigt. Seine Frau ist da anderer Ansicht, sie ist vom Gegenteil überzeugt. Wer hat recht? Begründe deine Antwort!

Lösungsvorschlag:

Mit dem bisherigen Wissen über Einflussfaktoren für den Verbrauch ist es bereits möglich, sich eine "verbrauchsarme" Strategie für das Bergabfahren mit einem Pkw zurechtzulegen. Die Aussage von Herrn Maier, Bergabfahren im Leerlauf anstatt mit Motorbremse spare Kraftstoff, ist für moderne Pkw nicht richtig, mit der Begründung, dass sie über eine elektronisch gesteuerte Schubabschaltung verfügen, welche beim Bergabfahren automatisch aktiviert wird, sobald der momentane Leistungsbedarf negativ ($P(v, a) < 0$) wird. Damit sinkt der instantane Kraftstoffverbrauch auf null. Es kann also beim Bergabfahren mit Motorbremse der Leistungsaufwand P_0 vollständig kompensiert und Kraftstoff gespart werden, falls die Straße nur steil genug ist. Im Leerlauf ist dies jedoch nicht möglich, da in diesem Fall die *Schubabschaltung* nicht aktiv ist!

Etwas komplizierter sieht die Situation für ältere Automodelle aus. Sie verfügen meist über keine elektronische *Schubabschaltung*, welche beim Bergabfahren aktiviert werden kann. In diesem Fall kann es unter bestimmten Voraussetzungen durchaus möglich sein, im Leerlauf Kraftstoff einzusparen: Auf geraden langen Straßen, die nur ein geringes Gefälle aufweisen bevor sie in ein Flachstück übergehen, kann beispielsweise beim Fahren im Leerlauf der "Schwung" des Fahrzeuges ausgenützt und damit etwas Kraftstoff gespart werden. Allerdings ist das lange Bergabfahren im Leerlauf mit höchster Vorsicht zu genießen, da die "Motorbremse" nicht aktiv ist und die Bremsen beim Verzögern leicht überhitzen können! Es sollte also beim Bergabfahren immer ein der Fahrgeschwindigkeit entsprechender Gang gewählt werden, in dem das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit den Berg hinab

gefahren werden kann. Da bei älteren Modellen oftmals keine *Schubabschaltung* zur Verfügung steht, tendieren manche AutofahrerInnen gelegentlich sogar dazu, den Motor während der Fahrt ganz abzustellen. Dies wäre nach unseren theoretischen Betrachtungen die kraftstoffärmste Lösung für das Bergabfahren und würde einer "manuellen" Schubabschaltung gleichkommen. Diese Vorgehensweise ist allerdings äußerst bedenklich (Einrasten der Lenkradsperre, Deaktivierung des Bremskraftverstärkers, Ausfall der Lichtanlage, Deaktivierung der Servolenkung, etc.) und überdies hinaus gesetzlich verboten!

□

Die Hauptaufgabe besteht nun darin, aus der Gesamtleistungsformel

$$P(v, a) = P_{dyn} + P_0$$

eine Formel für den Kraftstoffverbrauch pro Kilometer aufzustellen. Bevor aber der Begriff der *streckenbezogenen Verbrauchsrate* beleuchtet werden kann, ist es notwendig, Begriffe wie *Energie* und *Leistung* näher zu erörtern.

2.4.7. Energie und Leistung

Die (volumenbezogene) kalorische *Energiedichte* w ("Energie pro Volumen") von Benzin und Diesel beträgt in etwa $39,6 \cdot 10^6 \text{ J/Liter} \equiv 11 \text{ kWh/Liter}$ (vgl. $1 \text{ Joule} \equiv 1 \text{ Wattsekunde}$). Multipliziert man den Wert der Energiedichte mit der Kraftstoffmenge $B(v, a)$ in Litern, so erhält man die bei der Verbrennung freigesetzte (Wärme-)Energie E :

$$E = wB$$

In der Regel ist es aber unmöglich, die im Kraftstoff gespeicherte kalorische Energie E vollständig in mechanische Arbeit umzuwandeln (siehe 39, S. 38 ff), sodass um den Wirkungsgradfaktor η weniger mechanische Energie zur Verfügung steht. Die Gleichung für den tatsächlichen mechanischen Energiegewinn bei der Verbrennung von Kraftstoff im Motor muss daher lauten:

$$E = \eta wB$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist bekannt, dass stets $\eta < 1$ gelten muss! Sonst würde ein "Perpetuum Mobile" existieren und alle Energieprobleme auf unserer Erde

wären gelöst! Wie aus der Physik bekannt ist, entspricht die Leistung P (beispielsweise die eines Motors) genau der Energie E , welche in vorgegebener Zeit t aufgewendet (zur Verfügung gestellt) wird:

$$P = \frac{E}{t}$$

Zur Verinnerlichung dieser Formel kann folgendes Beispiel dienen:

Beispiel: Für den Bau eines Gebäudeblocks werden n Bauarbeiter der Firma "Bau & Froh" engagiert, die für gewöhnlich alle zur gleichen Zeit Hand anlegen und mit konstanter Leistung P aber unabhängig voneinander (parallel) ihre Arbeit verrichten sollen. Der Gebäudeblock soll in der Zeit t errichtet werden. Für die Erstellung ist eine Gesamtenergie E erforderlich, die von den Arbeitern aufgewendet werden muss. Noch vor Baubeginn fällt unglücklicherweise aufgrund von Krankheit plötzlich die Hälfte der Arbeiter aus.



Abbildung 2-22: Bauarbeiten in Chemnitz 1970²⁰

Wie wirken sich die Krankheitsfälle auf die nun erforderliche "Arbeitsleistung" der gesunden Arbeiter aus, wenn der Gebäudeblock in der vorgegebenen Zeit fertiggestellt werden soll? Um welche Zeit später wird der Bau abgeschlossen sein, wenn man davon ausgeht, dass die gesunden Arbeiter nicht zügiger arbeiten können, als man vor Baubeginn angenommen hat? Begründe deine Antworten mit Hilfe der Formel $nP = \frac{E}{t}$, wobei n der Anzahl der Arbeiter, P der "Arbeitsleistung" eines Arbeiters, E der zu vollbringenden "Gesamtarbeit" und t der Gesamtarbeitszeit entspricht.

Lösungsvorschlag:

- Auswirkung auf die erforderliche "Arbeitsleistung P " eines gesunden Arbeiters:

²⁰ http://de.wikipedia.org/wiki/Bauberuf#mediaviewer/File:Bundesarchiv_Bild_183-J0724-0019-001,_Karl-Marx-Stadt,_Bau_%22Gro%C3%9Fe_Stadthalle%22,_Bauarbeiter.jpg

Eine Halbierung der Arbeitskräfte bedeutet in diesem Zusammenhang eine Halbierung von n . E und t bleiben unverändert. Damit die Gleichung $nP = \frac{E}{t}$ erfüllt bleibt, muss jeder gesunde Arbeiter seine "Arbeitsleistung" verdoppeln, mathematisch ausgedrückt bedeutet das

$$1/2n * 2P = \frac{E}{t} = const$$

damit das Gebäude in der vorgegebenen Zeit fertiggestellt werden kann. Eine Verdopplung der "Arbeitsleistung" kann auf zwei Arten bewerkstelligt werden:

1. Verdopplung der "Kraft", mit der ein Arbeiter arbeitet
2. Verdopplung der "Geschwindigkeit", mit der ein Arbeiter arbeitet

Damit ist auch die Formel "*Leistung = Kraft * Geschwindigkeit*", kurz: $P = Fv$, erklärbar.

- Auswirkung auf die "Gesamtarbeitszeit t ":

Angenommen jeder Arbeiter hat bereits vor Bekanntwerden der Krankheitsfälle mit maximaler ("voller") Arbeitsleistung ("Kraft" und "Geschwindigkeit") gearbeitet, d.h. $P = const$. Nach Umformung der Gleichung auf t erhält man die Form

$$t = \frac{E}{nP}$$

und nach Halbierung der Arbeitskräfte n

$$t = \frac{E}{\frac{1}{2}nP} = 2 * \frac{E}{nP}$$

Durch geschicktes Umformen der Gleichung sieht man also, dass bei halber Anzahl der Arbeitskräfte eine Verdopplung der "Gesamtarbeitszeit" bis zur Fertigstellung des Gebäudeblocks einzuplanen ist. □

In obigem Beispiel wurden die Zusammenhänge *Leistung ~ Energie* und *Leistung ~ $\frac{1}{Zeit}$* bzw. *Leistung ~ Kraft* und *Leistung ~ Geschwindigkeit* anschaulich demonstriert.

"Wie kommt man aber von der verrichteten Arbeit / benötigten Energie auf den Verbrauch pro Fahrstrecke?"

Mit dieser Frage beschäftige ich mich im nächsten Unterkapitel.

2.4.8. Die Kraftstoffverbrauchsrate

Nun ist es an der Zeit, die *Verbrauchsrate* $\dot{B}(v, a)$ eines Pkw nach Treiber (2010, S. 279 ff) einzuführen. Unter Verwendung der Formel für Energie und Leistung in Differentialschreibweise

$$P = \frac{dE}{dt}$$

erhält man

$$P = \frac{\eta_w dB}{dt} = \eta_w \dot{B}$$

$\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ entspricht hierbei dem Kraftstoffverbrauch pro Zeiteinheit und wird auch als *zeitliche Verbrauchsrate* bezeichnet. Sie trägt die Einheit *Liter/Sekunde*. Damit der Verbrauch aber in Litern pro Fahrstrecke, kurz *Liter/Meter* angegeben werden kann, muss das Differential $\frac{dB}{dt}$ mit $\cdot \frac{ds}{ds}$ erweitert werden, was nichts anderes als die Anwendung der Kettenregel bedeutet:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dB}{ds}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Änderung des Weges nach der Zeit der Geschwindigkeit entspricht, kurz $\frac{ds}{dt} = v$. Der Ausdruck $\frac{dB}{ds}$ entspricht jetzt der gesuchten *streckenbezogenen Verbrauchsrate* und hat die Einheit *Liter/Meter*. Nach Einsetzen in die Formel für den momentanen Leistungsbedarf P erhält man:

$$P = \eta_w v \frac{dB}{ds}$$

bzw. nach Umformung auf die *streckenbezogene Verbrauchsrate*

$$\frac{dB}{ds} = \frac{P}{\eta w v}$$

Da der streckenbezogene Kraftstoffverbrauch $\frac{dB}{ds}$ eines Pkw üblicherweise in *Litern/100 km* Fahrstrecke angegeben wird, muss dieser Ausdruck noch mit 10^5 multipliziert werden ($100 \text{ km} \equiv 10^5 \text{ m}$) und man erhält die "fertige" Verbrauchsformel:

$$B_{100} = 10^5 * \frac{P}{\eta w v}$$

Bemerkung: In einigen Büchern und Zeitschriften wird der streckenbezogene Kraftstoffverbrauch auch in der Form

$$B_{100} = \frac{10^5 C_{spez}}{v} P$$

angegeben. Hierbei steht

$$C_{spez} = \frac{1}{\eta w}$$

für den *volumenbezogenen spezifischen* Kraftstoffverbrauch (in *Liter/kWh*). Für den *massebezogenen spezifischen* Verbrauch (in *kg/kWh*) muss C_{spez} noch mit der *spezifischen Masse* ("=Dichte", für Benzin etwa *0,78 kg/Liter* bzw. Diesel *0,85 kg/Liter*) multipliziert werden.

□

C) Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Mit dem obigen Verfahren zur Bestimmung des instantanen (momentanen) Kraftstoffverbrauchs kann nun sukzessiv der weitere Tiefgang in das Thema gewagt werden. Ich möchte betonen, dass es äußerst wichtig ist, dass die SchülerInnen die Abhängigkeiten, d.h. die funktionalen Zusammenhänge, der Verbrauchsformel verstehen. Aus diesem Zweck sollen die SchülerInnen im Anschluss an die physikalische und mathematische Herleitung der Formel deren Parameter nach Belieben variieren und den instantanen Verbrauch bei bestimmten Geschwindigkeiten für verschiedene Fahrzeugtypen berechnen. Denn nur so ist

es möglich, dass sie ein tiefgreifendes Verständnis der Einflussfaktoren für den Verbrauch eines Pkw erlangen. Der anschließende Arbeitsauftrag an die SchülerInnen könnte zum Beispiel mit folgender Fragestellung an der Tafel lauten:

*"Von welchen Größen hängt der Kraftstoffverbrauch ab? Untersuche die Verbrauchsformel $B_{100} = 10^5 * \frac{P}{\eta w v}$ aus dem Physik-basierten Modellansatz und erstelle eine Datei in GeoGebra, mit welcher du die Funktion $B_{100}(v)$ für verschiedene Parameterwerte graphisch darstellen kannst!"*

Bevor man sich an die Arbeit mit *GeoGebra* macht (siehe Anwendungsbeispiele in **83**, S. 82 ff), sollte man sich zunächst einmal die Frage stellen, von welchen Parametern der augenblickliche Kraftstoffverbrauch überhaupt abhängt. Wenig überraschend erkennt man schnell, dass der Kraftstoffverbrauch B_{100} vom Leistungsbedarf P , vom Motorwirkungsgrad η , von der kalorischen Energiedichte w und von der Geschwindigkeit v abhängt. Wenn man einige dieser physikalischen Größen weiter unter die Lupe nimmt, so erkennt man, dass sie ebenfalls wieder Funktionen von Variablen sind. Beispielsweise ist der Leistungsbedarf P eines Pkw wiederum von den zeitlichen Größen Fahrgeschwindigkeit und Beschleunigung, sowie von den zeitlich unabhängigen Größen Masse, c_w -Wert, c_r -Wert, Dichte der Luft, Stirnfläche des Autos, Gravitationsbeschleunigung und Steigungswinkel der Straße abhängig. Andererseits ist der Motorwirkungsgrad im Wesentlichen eine Funktion des instantanen Leistungsbedarfs und der Motordrehzahl, die ihrerseits wiederum eine Funktion der Geschwindigkeit und der Gangwahl darstellt. Mathematisch können diese Abhängigkeiten folgendermaßen formuliert werden:

$$P = P(v(t), a(t), m, c_w, c_r, \rho, A, g, \alpha)$$

$$\eta = \eta(P, f(v, G))$$

Damit bietet die Verbrauchsgleichung B_{100} genügend Spielraum für Modellannahmen zur Berechnung des absoluten Kraftstoffverbrauchs in Alltagsszenarien. An dieser Stelle des Unterrichts können nun die funktionalen Abhängigkeiten der Verbrauchsformel anhand zahlreicher interessanter Beispiele diskutiert werden.

3. Beispiele - Untersuchung von Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch

Die SchülerInnen diskutieren in Partner- und Gruppenarbeiten (auch die Methode "Unterricht und Lernen an Stationen" ist möglich!), welche der folgenden Aussagen (vgl. Treiber, 2010, S. 285 f) bezüglich des Kraftstoffverbrauchs korrekt sind und welche nicht. Das Ziel ist es, Antworten mit Hilfe der Verbrauchsformel $B_{100} = \frac{10^5}{\eta w v} P$ und geeigneten Annahmen für die Parameter der Formel zu begründen! Dabei soll *GeoGebra* ebenfalls zum Einsatz kommen. Zur Vereinfachung dürfen ein konstanter Wirkungsgrad η und Fahrten bei konstanter Geschwindigkeit, d.h. $v(t) = \text{const} \Rightarrow a(t) = 0$, angenommen werden! Schlussendlich werden die einzelnen Ergebnisse an der Tafel zusammengetragen und diskutiert.

Aussage 1: "Der Mehrverbrauch durch eine Klimaanlage wirkt sich vor allen Dingen in der Stadt aus."

Lösungsvorschlag:

Mit obiger Formel für den Kraftstoffverbrauch B_{100} und dem Ausdruck für den Leistungsbedarf P erhält man folgende Beziehung:

$$B_{100} = \frac{10^5}{\eta w v} P = \frac{10^5}{\eta w} \left[\frac{P_0}{v} + F \right]$$

Der zusätzliche elektrische Leistungsaufwand ΔP_0 , der durch eine aktive Klimaanlage verursacht wird, muss zum grundsätzlichen Leistungsbedarf P_0 addiert werden. Dadurch wird die Verbrauchserhöhung $\Delta B_{100} = \frac{10^5}{\eta w} \frac{\Delta P_0}{v} \sim \frac{1}{v}$ umso größer, je geringer die Geschwindigkeit ist. Ein typischer Wert für den Leistungsmehraufwand durch eine eingeschaltete Klimaanlage ist zum Beispiel $\Delta P_0 = 5 \text{ kW}$. Wählt man zusätzlich $\eta = 0,25$ für den Wirkungsgrad und $w = 39,6 * 10^6 \text{ J/Liter}$ für die Energiedichte des Kraftstoffes, so kann man den Mehrverbrauch ΔB_{100} für bestimmte Geschwindigkeiten tabellieren:

v in km/h	50	80	100	130	160	200
ΔB_{100} in l/100 km	3,64	2,72	1,82	1,40	1,14	0,91

Tabelle 3-1: Mehrverbrauch durch Klimaanlage in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Wie aus der **Tabelle 3-1** zu erkennen ist, sinkt der Mehrverbrauch durch eine aktivierte Klimaanlage linear mit der Geschwindigkeit. Die Aussage *"Der Mehrverbrauch durch eine Klimaanlage wirkt sich vor allen Dingen in der Stadt aus."* ist demnach richtig!

Vielleicht bringt dieses doch etwas überraschende Ergebnis den Einen oder die Andere dazu, bei der nächsten Fahrt im Stadtgebiet an einem heißen Sommertag auf die Klimaanlage zu verzichten und stattdessen das Fenster zu öffnen?

□

Aussage 2: *"Der Mehrverbrauch durch einen Dach-Gepäcksträger wirkt sich vor allen Dingen in der Stadt aus."*

Lösungsvorschlag:

Wenn man davon ausgeht, dass sich bei montiertem Dach-Gepäcksträger der c_w -Wert von 0,3 auf 0,4 erhöht, so bewirkt diese Annahme einen streckenbezogenen Mehrverbrauch von $\Delta B_{100} = \frac{10^5}{\eta w} \frac{1}{2} \Delta c_w \rho A v^2 \sim v^2$, der quadratisch mit der Geschwindigkeit anwächst. Zum Tabellieren des Mehrverbrauchs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit können beispielsweise folgende Parameterwerte angenommen werden:

Modellannahmen	
Motorwirkungsgrad:	$\eta = 0,25$
Energiedichte des Kraftstoffes:	$w = 39,6 * 10^6 \text{ J/Liter}$
c_w -Wert des Autos mit Dach-Gepäcksträger:	$\Delta c_w = 0,4$
Dichte von Luft bei 20°C Außentemperatur:	$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$
Querschnitts- oder Stirnfläche des Autos:	$A = 4 \text{ m}^2$

Tabelle 3-2: Modellannahmen 1

v in km/h	50	80	100	130	160	200
ΔB_{100} in l/100 km	1,87	4,79	7,48	12,64	19,15	29,93

Tabelle 3-3: Mehrverbrauch durch Dach-Gepäcksträger in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Die Aussage "Der Mehrverbrauch durch einen Dach-Gepäcksträger wirkt sich vor allen Dingen in der Stadt aus." ist demnach nicht richtig! Die Erhöhung des c_w -Wertes aufgrund Gepäckträger, Räder oder sonstiger Transportstücke auf dem Autodach schlägt sich erst bei höheren Geschwindigkeiten auf den Kraftstoffverbrauch nieder. Dieses Beispiel zeigt, dass durch eine vernünftige Gepäcksverstaung im Innenraum des Autos vor längeren Autobahnfahrten mitunter jede Menge Urlaubsgeld gespart werden kann. Der Transport von aufgestellten Fahrrädern auf dem Autodach hat überdies hinaus ähnliche Auswirkungen auf den Verbrauch. Der Radtransport mit einem speziellen Radträger, der an der Anhängerkupplung im hinteren Bereich des Autos befestigt werden kann, ist gegenüber einer Befestigungsschiene auf dem Autodach auf jeden Fall vorzuziehen, da sich dadurch nicht nur der c_w -Wert sondern auch die Windangriffsfläche (Stirnfläche) des Autos unmerklich wenig vergrößern!

□

Aussage 3: "Auf Autobahnen kann man mehr als 2% Kraftstoff sparen, wenn man nicht volltankt, sondern den Tank nur bis zur Hälfte füllt und dafür immer wieder auftankt."

Lösungsvorschlag:

Bei der absoluten Häufigkeit, mit der Tankstellen auf Autobahnraststätten auftauchen, scheint eine derartige "Tank-Strategie" auf den ersten Blick plausibel und effektiv zu sein. Unter Betrachtung der mittleren Massen-Ersparnis Δm , die sich aus der Differenz zwischen mittlerer Masse bei Fahrt mit vollem Tank (im Mittel eine halbe Tankfüllung) und mittlerer Masse bei Fahrt mit halbem Tank (im Mittel eine Viertel-Tankfüllung) ergibt, erhält man für einen 80-Liter-Tank eine mittlere Massen-Ersparnis von weniger als $\Delta m = 40 - 20 = 20 \text{ kg}$. Hierbei wurde bereits berücksichtigt, dass die spezifische Masse von Kraftstoff in der Regel kleiner als 1 kg/Liter ist. Daraus resultiert eine Verringerung des mittleren Kraftstoffverbrauchs um $\Delta B_{100} = \frac{10^5}{\eta w} c_r \Delta m g \cos(\alpha) = -0,0396 \text{ Litern}$ auf einer ebenen Strecke ($\cos(\alpha) = 1$) von 100 Kilometern mit konstanter Geschwindigkeit. (Wähle $\eta = 0,25$, $w = 36,9 \cdot 10^6$, $c_r = 0,02$ und $g = 9,81$).

Die mittlere Kraftstoffersparnis liegt also unter 40 ml auf einer Strecke von 100 Kilometern. Bei einem Auto mit einem durchschnittlichen Verbrauch von 6 l/100 km sind das gerade mal $\frac{0,04}{6} 100 \% \approx 0,67 \%$ Kraftstoffersparnis! Die Aussage "Auf Autobahnen kann man mehr als 2% Kraftstoff sparen, wenn man nicht volltankt, sondern den Tank nur bis zur Hälfte füllt und dafür immer wieder auftankt." ist demnach nicht richtig!

□

Anmerkung: Obiger Wert für die Kraftstoffersparnis bei Fahrten mit einem halben Tank anstatt mit einem vollen ist nur ein Näherungswert! In der Realität fällt die Ersparnis noch viel geringer aus, da für Motorstarts, Warmlaufzeiten und Beschleunigungsvorgänge nach Tankstellenaufenthalt weiterer Kraftstoff aufgewendet werden muss!

□

Aussage 4: "Tempo-30-Zonen reduzieren den Kraftstoffverbrauch im Stadtgebiet."

Lösungsvorschlag:

Im Stadtgebiet beträgt die erlaubte Höchstgeschwindigkeit 50 km/h. Dies entspricht in etwa $\frac{50 \text{ km/h}}{3,6} \cong 13,89 \text{ m/s}$. Aus der untenstehenden Graphik (Abbildung 3-1) ist leicht zu erkennen, dass der Verbrauch für niedrige Geschwindigkeiten sogar zunimmt.

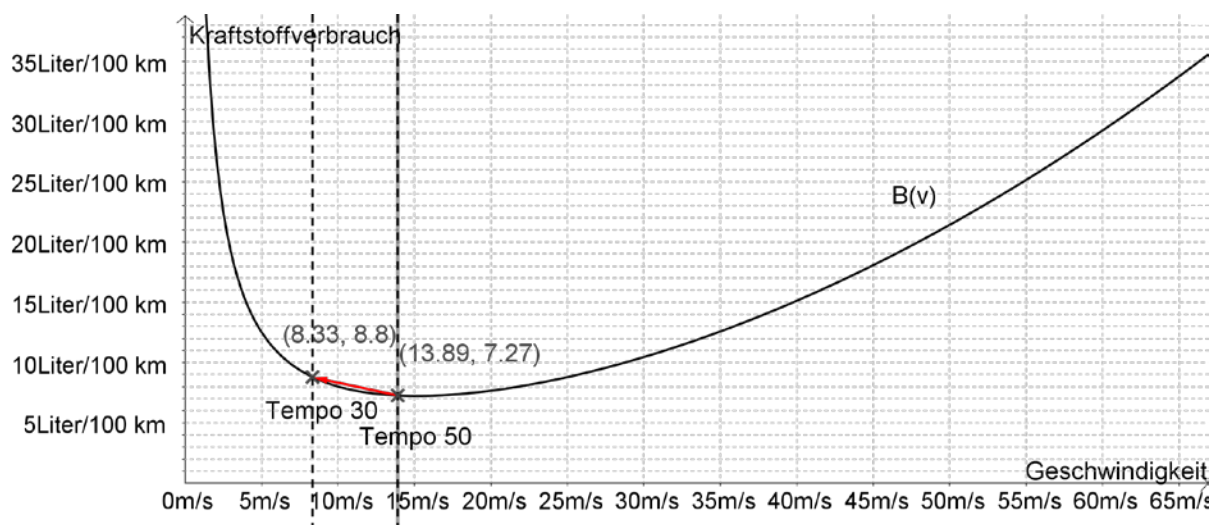


Abbildung 3-1: Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Modellannahmen	
Motorwirkungsgrad:	$\eta = 0,25$
Energiedichte des Kraftstoffes:	$w = 39,6 * 10^6 \text{ J/Liter}$
c_w -Wert des Autos:	$\Delta c_w = 0,3$
Dichte von Luft bei 20°C Außentemperatur:	$\varrho = 1,2 \text{ kg/m}^3$
Querschnitts- oder Stirnfläche des Autos:	$A = 4 \text{ m}^2$
Rollwiderstandskoeffizient:	$c_r = 0,02$
Fahrt bei konstanter Geschwindigkeit:	$a = 0 \rightarrow F_T = 0$
Fahrt auf ebener Straße:	$\alpha = 0 \rightarrow F_H = 0$
Mindest-Leistungsbedarf:	$P_0 = 5 \text{ kW}$
Erdbeschleunigung/Gravitation:	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Masse des Autos:	1500 kg

Tabelle 3-4: Modellannahmen 2

Dieser Verbrauchsanstieg für Geschwindigkeiten $\leq 50 \text{ km/h}$ ist mit dem Ausdruck $\frac{P_0}{v}$ für den Mindestleistungsbedarf aus der Verbrauchsformel zu erklären. Demnach ist die Aussage "Tempo-30-Zonen reduzieren den Kraftstoffverbrauch im Stadtgebiet." in der Weise nicht richtig!

□

Aussage 5: "Luft-Hunderter statt Tempo 130 reduzieren den Kraftstoffverbrauch auf Autobahnen."

Lösungsvorschlag:

Dazu halte man sich **Abbildung 3-2** vor Augen:

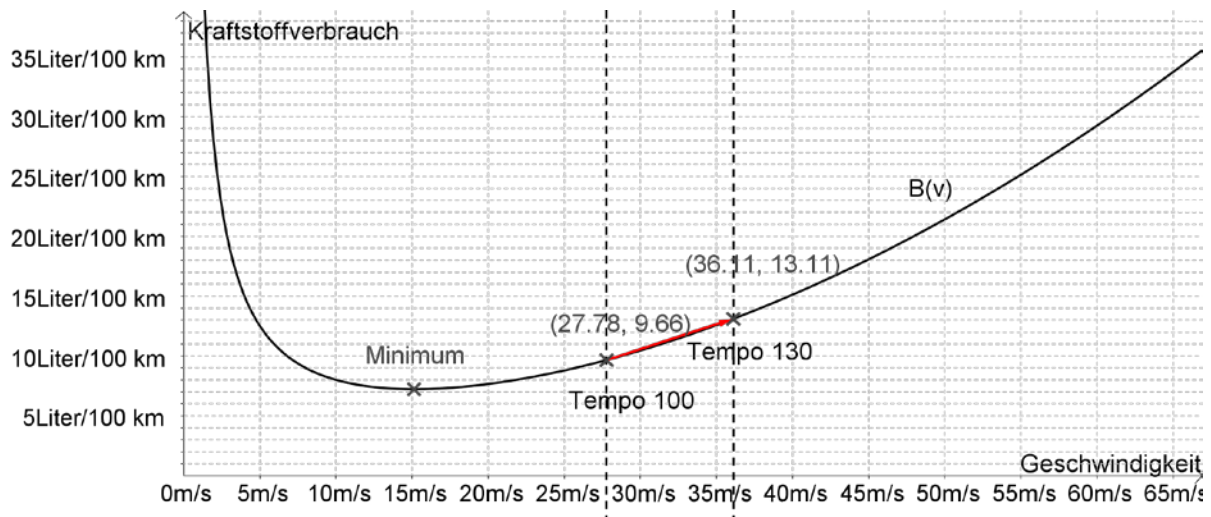


Abbildung 3-2: Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Im Intervall $[27,78/36,11]$ ist die Funktion $B(v)$ streng monoton steigend, was mit dem Ausdruck $F_L = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$ für die Luftreibung erklärbar ist. Die Aussage "Luft-Hunderter statt Tempo 130 reduzieren den Kraftstoffverbrauch auf Autobahnen" ist demnach richtig! Wie man im Weiteren aus [Abbildung 3-2](#) gut erkennen kann, besitzt die Funktion $B(v)$ an der Stelle 15 ein Minimum. Tempo-Reduzierungen machen somit erst ab Geschwindigkeiten $\geq 15 \text{ m/s} \cong 54 \text{ km/h}$ einen Sinn!

□

Anmerkung: Variiert man den Wert für den Mindestleistungsbedarf P_0 (Begründung durch ein- bzw. ausgeschaltete Klima- oder Lichtanlage, Sitzheizung, etc.), verschiebt sich die Minimumstelle nach links bzw. rechts, was eine andere "Eco"-Geschwindigkeit zur Folge hat. Ein ähnliches Ergebnis erzielt man auch durch Veränderung der Einflussfaktoren für die Luftwiderstandskraft (c_w -Wert, Luftdichte ρ , Querschnittsfläche A). Damit kann für jedes beliebige Szenario die verbrauchsoptimale Geschwindigkeit berechnet werden!

□

Aussage 6 - Kraftstoffverbrauch Autobahn vs. Passstraße: "Bei einer Autofahrt mit konstanter Geschwindigkeit von 130 km/h auf der Autobahn verbraucht man im Mittel weniger Kraftstoff als auf einer Passstraße mit 5% Steigung, die man im Aufstieg mit 50 km/h sowie bei der Abfahrt mit Motorbremse fährt."

Lösungsvorschlag:

Nach Ergänzung der [Abbildung 3-2](#) mit zwei weiteren Graphen für Fahrten bei 5% Steigung bzw. 5% Gefälle erhält man zusätzlich nützliche Informationen über den Verbrauch bei konstanter Geschwindigkeit und konstantem Motorwirkungsgrad.

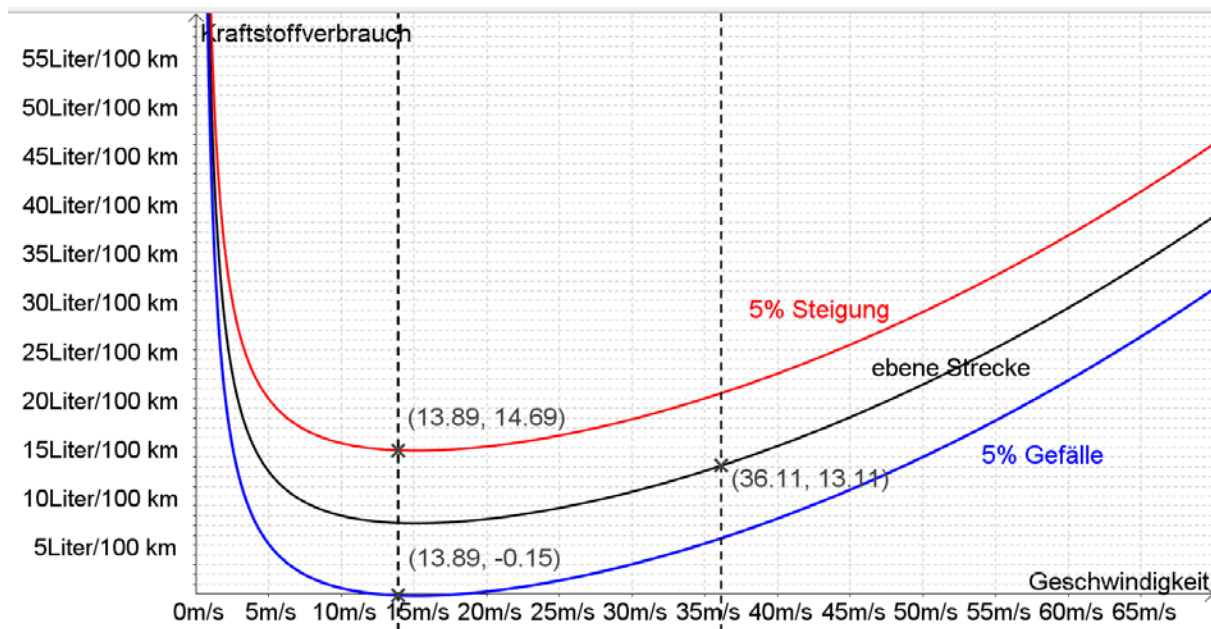


Abbildung 3-3: Kraftstoffverbrauch für Pässe und Autobahnen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Auf der Autobahn verbraucht man nach [Abbildung 3-3](#) bei einer konstanten Geschwindigkeit von $130 \text{ km/h} \cong 36,11 \text{ m/s}$ im Mittel $13,11 \text{ Liter}$ Treibstoff pro 100 Kilometer Fahrstrecke. Auf der Pässestraße wird nur auf der Bergauffahrt Kraftstoff verbraucht (rote Linie), weil bei einer Geschwindigkeit von $\frac{50 \text{ km/h}}{3,6} \cong 13,89 \text{ m/s}$ bei der Fahrt bergab (blaue Linie) die anfallende Grundleistung P_0 durch das Gefälle vollständig kompensiert wird (hier gilt sogar $P < 0$). Für die Fahrt bergauf beträgt der Verbrauch rund $14,7 \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$. Sobald die Hälfte des Weges der Pässestraße zurückgelegt wurde, sinkt der Verbrauch aufgrund der *Schubabschaltung* auf null. Geht man weiter davon aus, dass der Pass "streckensymmetrisch" ist, d.h. die Länge des Anstieges ist gleich der Länge des Abstieges, so erhält man für den Gesamtverbrauch zur Bewältigung des PASSES $\frac{14,7 \text{ l/100km}}{2} \cong 7,4 \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$. Dies entspricht in etwa $\frac{7,4}{13,11} * 100\% \approx 56\%$ des Verbrauchs auf der Autobahn! Unter den gewählten Voraussetzungen ist obige Aussage damit nicht richtig!

□

Anmerkung: Trotz der beachtlichen Steigung von 5% wird auf der Pässestraße weniger Kraftstoff verbraucht als auf der Autobahn. Als begeisterter Autofahrer und stolzer Autobahnvignetten-Besitzer könnte man sich allerdings die Frage stellen, ab welcher Steigung des PASSES bzw. welcher Geschwindigkeit auf der Autobahn sich die Verbrauchsverhältnisse umkehren?

Eine einfache Möglichkeit diese Frage zu beantworten, bietet das Werkzeug "Schieberegler" in *GeoGebra*. Damit können Funktionsparameter auf bequeme Weise variiert und gleichzeitig der dazugehörige Funktionsgraph ausgegeben werden. Für unsere Zwecke empfehle ich, den Parameter für die Steigung α als Schieberegler festzulegen. Bei der Umrechnung von Prozentangaben bei Straßensteigungen in (Alt-)Grad ist die Beziehung $\alpha = \arctan\left(\frac{k\%}{100}\right)$ zu verwenden. Im konkreten Beispiel kann es auch nützlich sein, eine "Hilfsgerade" $h(v)$ zu definieren, die den anzunähernden "Doppel-Verbrauch" bei einer Geschwindigkeit von $130 \text{ km/h} \cong 36 \text{ m/s}$ anzeigt, in unserem Fall bei $h(v) = 2 * 13,11 = 26,22$. Anschließend kann der Schieberegler solange verändert werden, bis die Verbrauchskurve $B(v)$ die "Hilfsgerade" $h(v)$ im Punkt S an der Stelle $\frac{50 \text{ km/h}}{3,6} \cong 13,9 \text{ m/s}$ schneidet. Der im Experiment gefundene Wert für α kann wieder mit Hilfe von $\tan(\alpha) * 100\% = k\%$ in eine Straßensteigung in Prozent umgerechnet werden. k entspricht dann der Steigung, ab welcher sich eine Fahrt durch den Autobahntunnel anstatt über den Pass lohnt. Wie in **Abbildung 3-4** zu erkennen ist, ist dies bei $\alpha = 7,33$, also bei Pässestraßen ab etwa 12,86% Steigung der Fall.

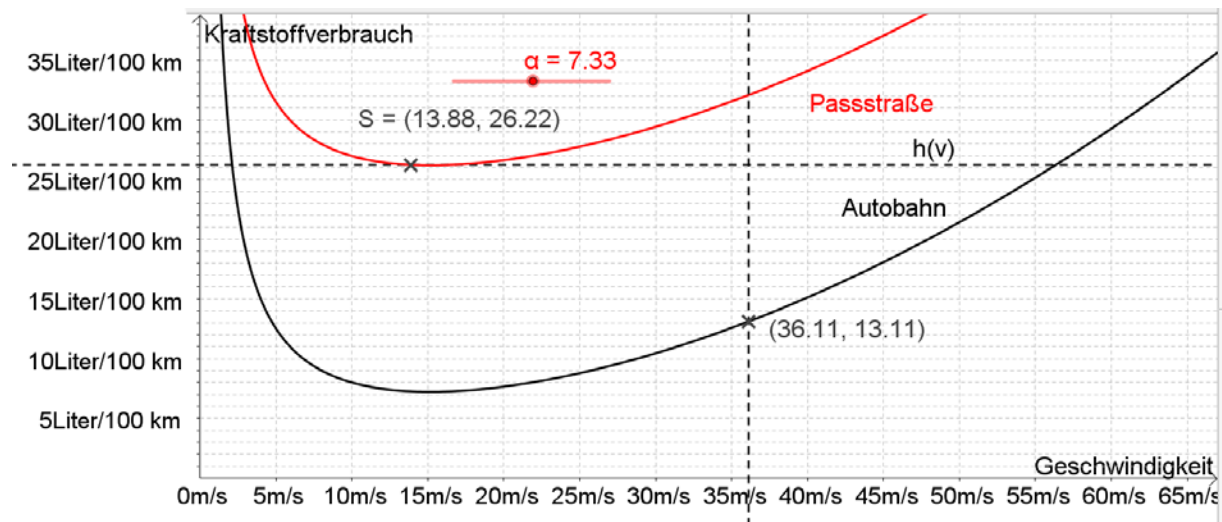


Abbildung 3-4: Kraftstoffverbrauch für Pässe und Autobahnen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Andererseits kehren sich bei einer Geschwindigkeit im Intervall $12,55 \leq v \leq 18,08 \text{ m/s}$ auf der Autobahn auch die Verbrauchsverhältnisse um, wie aus **Abbildung 3-5** ersichtlich ist.

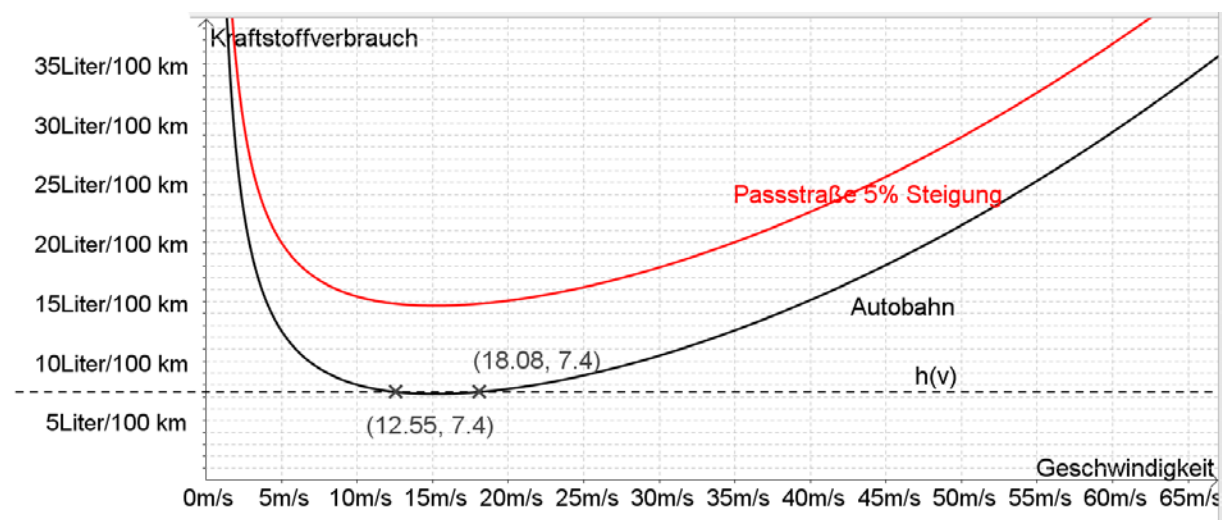


Abbildung 3-5: Kraftstoffverbrauch für Pässe und Autobahnen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Dieses Beispiel macht deutlich, dass es in manchen Fällen günstiger kommt, über die Pässestraße anstatt durch den Autobahntunnel zu fahren. Den entscheidenden Beitrag zum Gesamtverbrauch bei einer Fahrt über den Pass liefert jeweils die Hangabtriebskraft $F_H = mg \sin(\alpha)$. Hier wird deutlich, dass für schwere Fahrzeuge (Lkw, Sattelschlepper, Busse) die Fahrt eher durch den Tunnel als über den Pass führen sollte, wenn der Kraftstoffverbrauch gering gehalten werden soll. Allerdings müssen in einer detaillierten Transportkostenrechnung natürlich auch die Nebenkosten für Vignette und Maut für Autobahntunnels berücksichtigt werden! □

4. Kraftstoffverbrauch bei variabler Geschwindigkeit in Stausituationen

Übergang des instantanen Kraftstoffverbrauchs zum absoluten Streckenverbrauch im Stadt- und Autobahnverkehr

A) Einstieg in den Unterricht

Es ist kurz nach 17:00 an einem Montagnachmittag in Mitten des Monats November. "Aufbruchsstimmung" im Linzer Berufsverkehr: "Ich fahre gerade stadtauswärts in Richtung Ottensheim. Auf der Nibelungenbrücke steht alles, auf drei Spuren! Kein Durchkommen!", ertönt die Stimme eines etwas genervten Autofahrers während des Verkehrsfunkes aus dem Radio. Eine ähnliche Situation findet sich auf der weiter östlich liegenden Linzer Autobahnbrücke. In beiden Richtungen zäher Verkehr. Die Verkehrslage ist dramatisch! Alle nördlichen Stadtausfahrten sind überlastet. Es gibt nur langsames Weiterkommen auf den Straßen. Es bilden sich Verkehrsstaus.

Derartige Verkehrssituationen sind (weltweit) keine Seltenheit und gehören leider in den meisten Städten zum Berufsalltag. VerkehrsteilnehmerInnen fühlen sich gestresst wegen des ständigen Anhaltens und Wartens. Da hilft auch kein Fahrbahnwechsel! Selbst dreispurige Autobahnen reichen für eine solche "Blechlawine" nicht aus. Wenn alle fahren wollen, kommt keiner vorwärts. Zahlreiche Staudurchsagen etablierter Radiosender stehen de facto an der Tagesordnung.

Aber nicht nur der tägliche Berufsverkehr in der "Rush-Hour" sorgt für Zeitverluste und erhitzte Gemüter durch Verkehrsbehinderungen aufgrund eines zu hohen Verkehrsaufkommens auf den Straßen. Auch an starken Reisetagen an Wochenenden oder in den Ferien können sich zum Unmut vieler Autofahrer Staus bilden. Wie verhält es sich nun aber mit dem Kraftstoffverbrauch eines Pkw in Verkehrsstaus? Wie groß ist der Mehrverbrauch in Stausituationen? Wie wirken sich rote Ampeln und Kreuzungen auf den absoluten Verbrauch aus?

Diese und noch weitere Fragen bezüglich des Verbrauchs bei variabler Geschwindigkeit möchte ich im Folgenden behandeln und eine Anleitung geben, wie sich das bisher entwickelte Physik-basierte Verbrauchsmodell auf Stauszenarien anwenden lässt.

B) Material und Informationen sammeln

Für eine gelungene Herangehensweise an die Problembehandlung "Staus auf Autobahnen" ist es sinnvoll, Erfahrungen und Gedanken der SchülerInnen in das Unterrichtsgeschehen einzuflechten. Mögliche erste Schritte im Unterricht könnten demnach sein:

- Erfahrungen der SchülerInnen und der Lehrkraft über Staus im Straßenverkehr durch Erzählungen einfließen lassen und auf der Tafel zusammentragen.
- Mit Hilfe eines Radios, MP3-Players, Mobiltelefons, Tablets oder Kassettenrekorders werden aufgenommene Staufunkmeldungen wiedergegeben und die SchülerInnen angehalten, wichtige Informationen wie Ort und Länge des Staus ins Heft zu notieren.
- SchülerInnen informieren sich mit Hilfe einer „Stau-App“ über aktuelle Verkehrsaufkommen.

Anschließend kann von der Lehrkraft eine offene Aufgabenstellung formuliert werden, die es (zum Beispiel in Vierer-Gruppen) zu lösen gilt. Ich habe mich dazu entschieden, einen Eintrag aus dem *Guinness-Buch* der Rekorde als motivierendes Beispiel einer offenen Aufgabenstellung zu verwenden:

Beispiel - Offene Aufgabenstellung: Wikipedia (2014) zu Folge verzeichnet das *Guinness-Buch* der Rekorde den längsten Stau der Welt zwischen Paris und Lyon (Frankreich) im Jahre 1980 mit einer Gesamtlänge von 176 Kilometern! Wie viele Menschen befanden sich dabei vermutlich im Stau? Um wie viel mehr Kraftstoff wurde dabei pro Fahrzeug bzw. gesamt verbraucht?

Dies sind alle Informationen, die die SchülerInnen von der Lehrkraft erhalten. Die erste offene *Leitfrage* könnte beispielsweise so formuliert werden:

Leitfrage 1: "Wie viele Menschen stecken in einem 176 Kilometer langen Stau?"

C) Mathematisierung und Modellbildung

Die erste Teilaufgabe "*Abschätzen der Menschen im Stau*" bietet für die SchülerInnen eine gute Möglichkeit, die Prinzipien eines sogenannten *Fermi-Problems*²¹ kennenzulernen und anzuwenden. Das Ziel einer *Fermi*-Aufgabe besteht darin, eine komplexere Problemstellung mit möglichst wenigen Vorkenntnissen zu lösen bzw. Teillösungen so gut es geht abzuschätzen, um auf eine Gesamtlösung zu gelangen. Sie bietet also viel Spielraum für Eigeninterpretationen und individuelle Herangehensweisen an eine Aufgabe, die auf den ersten Blick "unlösbar" erscheint. Nach Greefrath (2010, S. 51) ist das Abschätzen im Rahmen von Modellbildungsprozessen unverzichtbar, wenn zwar die reale Situation, die mathematisch modelliert werden soll, bekannt ist, aber noch keine ausreichende Anzahl von Daten oder Messwerten zur Verfügung steht. Die einzige brauchbare Information, die die SchülerInnen bekommen, ist die Länge des Staus. Deshalb sollte im anschließenden Unterrichtsgespräch zunächst einmal erörtert werden, ob und wie man allgemeine Antworten auf die obige *Leitfrage* finden kann und welche zusätzlichen Informationen man benötigt, um die Menschen im Stau (natürlich nur näherungsweise!) berechnen zu können. Die Ergebnisse werden wieder auf der Tafel notiert. Man benötigt u.a. zusätzliche Antworten auf folgende Fragen:

- *Wie lange ist der Stau?*
- *Wie groß ist die Anzahl der Fahrspuren auf der Autobahn?*
- *Welche Fahrzeugtypen stehen im Stau und wie groß sind deren relative Anteile?*
- *Wie groß ist die durchschnittliche Länge eines dieser Fahrzeuge?*
- *Wie groß ist der mittlere Sicherheitsabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Fahrzeugen?*
- *Wie viele Autos passen auf eine 176 km lange Straße?*
- *Wie viele Autos passen auf eine 176 km lange, dreispurige Autobahn?*
- *Wie viele Menschen befinden sich durchschnittlich in einem Fahrzeug?*

Bei den meisten dieser gesuchten Größen handelt es sich um Durchschnittswerte, die nun von den Schülern/innen ermittelt werden sollen. Der Einfachheit halber kann angenommen werden, dass sich nur Pkw im Stau befinden. Diese Annahme des Ausschlusses von allen anderen Fahrzeugen kann dadurch bekräftigt werden, dass es z.B. an diesem Tag ein

²¹ vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem>

entsprechendes Fahrverbot (Wochenende) für Lkw gegeben hat. Der Ausschluss von anderen Fahrzeugtypen (Bussen, Motorrädern, Pkw mit Anhänger, etc.) ist unbegründet und dient vorerst nur zur Vereinfachung der Aufgabe. Ich möchte nun einige dieser Schätzwerte im Einzelnen besprechen:

- *Wie lange ist der Verkehrsstau?*

Laut Beispiel-Angabe ist der zu betrachtende Stau 176 km lang. Dies entspricht in etwa der Strecke Linz - Wien!

- *Wie lange ist ein Fahrzeug?*

Zum Abschätzen der Länge eines Autos empfiehlt es sich zu überlegen, wie viele Schritte eine Person machen muss, um, ausgehend vom vorderen Ende, das hintere Ende eines Pkw zu erreichen. Im Mittel benötigt man dafür vier bis fünf Schritte. Mit dieser Methode und einer durchschnittlichen Schrittweite von $0,9\text{ m}$ schätze ich die durchschnittliche Länge eines Autos in Metern mit $0,9\text{ m} * 5\text{ Schritte} = 4,5\text{ m}$ ab.

Alternativ kann natürlich ein Maßband für die Messung der Autolänge verwendet und das Ergebnis in Metern angegeben werden. Oder das Auto steht beispielsweise vor einem Gebäude, dessen Länge bereits bekannt ist, sodass diese Information als Schätzwert für die Länge eines Pkw verwendet werden kann. Um den Mathematikunterricht etwas praxisorientierter zu gestalten, kann beispielsweise auch eine Pkw-Längenmessung auf dem Schulparkplatz durchgeführt werden. Gerade das Forschen und Hantieren mit Zollstäben oder Längenmaßbändern kann für SchülerInnen sehr interessant sein! Will man selbst nicht Hand anlegen, so können im Rahmen einer Hausübung auch Werte aus Autoprospekten oder Zulassungsbescheinigungen von Fahrzeugen der Eltern oder Verwandten entnommen und auf diese Weise ein Durchschnittswert für die Länge eines Pkw ermittelt werden.

- *Wie viele Autos passen auf eine 176 km lange Straße?*

Bei dieser Fragestellung handelt es sich (vgl. Greefrath, 2006, S. 52) noch um eine recht einfache Fragestellung, da lediglich die Durchschnittslänge eines Fahrzeuges abgeschätzt werden muss, mit der anschließend die Gesamtlänge der Straße von 176 km dividiert wird. Für die Anzahl der Fahrzeuge, die auf einer Straße mit 176 km Länge Platz haben, findet man zum Beispiel den Wert $\frac{176 \text{ km}}{\text{Fahrzeuglänge}} \approx \frac{176 * 1000 \text{ m}}{5 \text{ Schritte} * 0,9 \text{ m}} \approx 39100 \text{ Fahrzeuge}$.

- *Wie groß ist der Sicherheitsabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Fahrzeugen?*

Analog zur Messung der Fahrzeuglänge kann auch eine Längenmessung des mittleren Abstandes zwischen parkenden Autos, den Autos in Parkplatzschlangen, vor Tiefgaragen-Ein- oder Ausfahrten, Tankstellen oder Waschanlagen, vor roten Ampeln oder Grenzübergängen und Mautstellen durchgeführt werden. Bei letzteren Varianten ist natürlich höchste Vorsicht geboten: Verkehrsgefährdungen der messenden SchülerInnen sind unbedingt zu vermeiden!

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den AutofahrernInnen zu unterstellen, dass viele von ihnen in Stausituationen mit ihrem Auto so stehen bleiben, dass sie vor sich noch ein Stück der Straße sehen können (vgl. [Abbildung 4-1](#)), um noch genügend Platz für etwaiges Rangieren vorzufinden, im Falle des Zurückrollens des vorderen Fahrzeuges noch rechtzeitig reagieren zu können oder um die vom Vordermann verursachten Abgase nicht direkt über die Lüftung im Auto einzusatmen und auf ein Minimum zu reduzieren. In diesem Fall ließe sich beispielsweise mit Hilfe des *Pythagoräischen Lehrsatzes* (Wo findet sich in [Abbildung 4-1](#) das zu betrachtende rechtwinkelige Dreieck?) die Länge des Sicherheitsabstandes abschätzen.

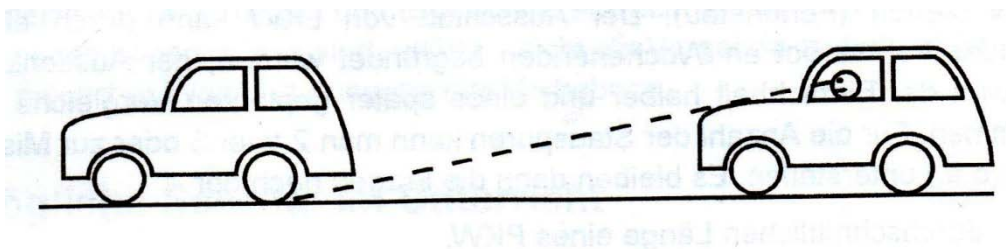


Abbildung 4-1: Sicherheitsabstand zweier Pkw (vgl. Blum, 1997, S. 72)

Aus der Erfahrung weiß man aber, dass der Sicherheitsabstand in Staus auf Autobahnen von jenem auf Parkplätzen, Ausfahrten oder vor roten Ampeln stark abweicht. Während zum Beispiel an einer roten Ampel möglichst dicht an dem vor einem stehenden Auto gehalten wird, um bei Grün noch "durchzukommen", wird auf der Autobahn ein gewisser Sicherheitsabstand eingehalten, der sich schon bei vorsichtigem Heranfahren an das Stauende ergibt (vgl. Blum, 1997, S. 72).

Für das konkrete Beispiel und die weiteren Berechnungen schätze ich der Einfachheit halber den durchschnittlichen Sicherheitsabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Pkw mit 0,5 m ab.

▪ *Wie viele Fahrzeuge haben in einem 176 km langen Stau Platz?*

Für die Beantwortung dieser Frage sind nun drei Schätzwerte erforderlich: Die durchschnittliche Fahrzeuglänge, der durchschnittliche Sicherheitsabstand und die durchschnittliche Anzahl der Fahrspuren. Wenn man davon ausgeht, dass ausschließlich Pkw im Stau stehen und ein Sicherheitsabstand von einem halben Meter zum nächsten Pkw eingehalten wird, so nimmt nach obiger Begründung der Schätzwerte jedes Fahrzeug einen Platz der Länge $4,5\text{ m} + 0,5\text{ m} = 5\text{ m}$ ein. Bei der Abschätzung der Anzahl von Fahrspuren wird es etwas knifflig. Laut *Google-Maps* führt die Hauptverbindung Paris - Lyon über die Autobahn A6, die Bildern zufolge teils zwei- und teils dreispurig verläuft. Autobahnen verlaufen in Gegenden von Auf- und Abfahrten meist dreispurig, um größtmögliche Sicherheit für die AutofahrerInnen zu gewährleisten, während sie in deformiertem Gelände (Führung über Brückentrassen und durch Tunnels) aus Kostengründen meist zweispurig verläuft. Wenn Details in der Angabe fehlen und keine weiteren Informationen über den Verlauf oder die Spurenanzahl der Autobahn vorhanden sind, empfehle ich einen Durchschnittswert von 2,5 Spuren (arithmetisches Mittel!) zu wählen. Damit erhält man nach einer Multiplikation und einer Division für die Gesamtzahl der Fahrzeuge, die in einem Stau der Länge 176 km stehen können,

$$\frac{2,5 * 176\text{ km} * 1000}{5\text{ m}} = 88000\text{ Fahrzeuge}$$

- *Wie viele Menschen befinden sich durchschnittlich in einem Auto?*

Zur Klärung dieser Fragestellung können Informationen aus den Erfahrungsberichten von SchülernInnen und LehrernInnen dienen. Die SchülerInnen beobachten an einer Kreuzung vorbeifahrende Autos und notieren dabei die Anzahl der Autos und der Insassen. Anschließend kann aus den absoluten Häufigkeiten das (gewichtete) arithmetische Mittel berechnet und als Schätzwert verwendet werden. Oder die SchülerInnen führen zum Beispiel in der Pause Schüler- und/oder Lehrerbefragungen im Schulgebäude durch und erhalten so Informationen über die durchschnittliche Anzahl der Personen in einem Auto.

Aus der eigenen Erfahrung weiß man, dass die durchschnittliche Anzahl der Pkw-Insassen sehr stark vom Zeitpunkt der Beobachtung abhängt und je nach Zweck der Autofahrt (Pendlerfahrt, Einkaufsfahrt, Urlaubsfahrt, etc.) äußerst unterschiedlich ausfällt. Während die Anzahl der Insassen pro Fahrzeug im morgendlichen bzw. abendlichen Individualverkehr meist nur im Bereich zwischen $1 \leq \# \text{ der Insassen} \leq 2$ liegt, so liegt sie bei (Familien-)Fahrten in den Urlaub meist etwas darüber. Die Entscheidung für eine geeignete Wahl hängt also von jedem/r Schüler/in selbst ab. Meine diesbezüglichen Beobachtungen führte ich am 8. Jänner im Linzer Abendverkehr zwischen 17:00 und 18:00 durch. In diesem Zeitraum konnte ich 1043 Pkw mit insgesamt 1477 Insassen ausmachen. Als Schätzwert für die nachfolgende Berechnung verwende ich den empirischen Durchschnittswert von $\frac{1477 \text{ Personen}}{1043 \text{ Pkw}} \approx 1,4 \text{ Personen/Pkw}$.

- *Wie viele Menschen standen im 176 km langen Stau?*

Da bereits die durchschnittliche Fahrzeuglänge, der durchschnittliche Sicherheitsabstand, die durchschnittliche Anzahl der Fahrspuren und die durchschnittliche Anzahl der Fahrzeuginsassen bekannt sind, kann nun abgeschätzt werden, wie viele Personen sich in etwa im Stau von 1980 zwischen Paris und Lyon befanden. Um dies zu bewerkstelligen, sind insgesamt zwei Multiplikationen und eine Division durchzuführen. Im Rückblick auf die vorherigen Abschätzungen sieht man, dass die Komplexität mit der Anzahl der Schätzgrößen

zugenommen hat. Auf diese Weise erhält man für die Gesamtanzahl der Personen, die im Rekordstau in den Autos gesessen hat, einen Endschätzwert von

$$\frac{2,5 \text{ Fahrspuren} * 176000 \text{ m Staulänge}}{4,5 \text{ m Fahrzeuglänge} + 0,5 \text{ m Sicherheitsabstand}} * 1,4 \frac{\text{Insassen}}{\text{Pkw}} =$$

$$= \mathbf{123200 \text{ Personen}}$$

Dieses Ergebnis ist beeindruckend!

Anmerkung: Ich möchte nochmals ausdrücklich betonen, dass es bei derartigen Aufgabenstellungen (*Fermi-Problemen*) durchaus legitim, ja sogar erwünscht ist, dass die SchülerInnen je nach Erfahrungen und Vorkenntnissen zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen können, mit denen dann weitergerechnet wird. Das Ziel liegt nicht darin, ein exaktes Ergebnis zu erzielen, sondern vielmehr in den Begründungen und im Weg, wie man mit sinnvollen Annahmen und Überlegungen auf einen plausiblen Endschätzwert gerät. Die vier relevanten Schätzgrößen (Fahrzeuglänge, Sicherheitsabstand, Fahrspuren, Insassen) hätten demnach genauso richtig auf folgende Weise abgeschätzt werden können:

- Durchschnittliche Fahrzeuglänge im heterogenen Verkehr (80% Pkw, 5% Busse, 10% Lkw, 5% Motorräder) + jeweils 1 Meter Sicherheitsabstand zum nächsten Fahrzeug:

$$\frac{80\%}{100} * (4,5 + 1) + \frac{5\%}{100} * (13 + 1) + \frac{10\%}{100} * (15 + 1) + \frac{5\%}{100} * (2 + 1) = 6,85 \text{ m}$$

- Durchschnittliche Fahrzeugdichte (Fahrzeuge/km):

$$\frac{1 \text{ km}}{0,00685} \approx 146 \frac{\text{Fahrzeuge}}{\text{km}}$$

- Fahrzeuganzahl in einem Stau der Straßenlänge 176 km:

$$146 * 176 \text{ km} = 25696 \text{ Fahrzeuge}$$

- Fahrzeuganzahl in einem Stau einer durchschnittlich 2,5-spurigen Autobahn der Länge 176 km:

$$21662 * 2,5 = 64240 \text{ Fahrzeuge}$$

- Anzahl der Personen in einem 2,5-spurigen Stau der Länge 176 km (durchschnittlich angenommene Personenanzahl/Fahrzeug: 1,4/Pkw, 20/Bus, 1/Lkw, 1/Motorrad):

$$64240 * \left(\frac{80\%}{100} * 1,4 + \frac{5\%}{100} * 20 + \frac{10\%}{100} * 1 + \frac{5\%}{100} * 1 \right) \approx \mathbf{145000 \text{ Personen}}$$

□

Dieses Beispiel soll verdeutlichen, dass man mit unterschiedlichen Modellannahmen zu durchaus unterschiedlichen Ergebnissen kommen kann, die jeweils mit ihrer eigenen Begründung richtig sind.

Eine weitere interessante Fragestellung besteht nun darin, den Mehrverbrauch für einen Pkw im Stau gegenüber einer Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v unter Verwendung der Verbrauchsformel $B_{100}(v, a)$ abzuschätzen. Ich komme daher nun zur zweiten Leitfrage, die so lauten könnte:

Leitfrage 2: "Wie groß ist der Mehrverbrauch im Stop-&-Go-Verkehr gegenüber dem Fließverkehr mit konstanter Geschwindigkeit?"

Für die Modellierung des Kraftstoffverbrauchs in Stauszenarien können u.a. folgende Annahmen getroffen werden:

- 1) Die Intervalllänge für die freie Fahrt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Haltephasen beträgt durchschnittlich 100 m.
- 2) Die freie Geschwindigkeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Haltephasen beträgt $v_0 = 10 \text{ m/s}$.
- 3) Vor bzw. nach jeder Haltephase wird das Auto mit $a = 2 \text{ m/s}^2$ verzögert bzw. beschleunigt.
- 4) Jede Haltephase dauert im Mittel 10 Sekunden. In dieser Zeit läuft der Motor auf Standgas und muss lediglich die Grundleistung P_0 aufbringen.
- 5) Für die Parameterwerte des Kraftstoffmodells dienen die Werte aus **Tabelle 3-4**.

Zunächst stellt sich die Frage, wie viel die Gesamtmenge an Kraftstoff für die gesamte Autobahnstrecke der Länge 176 km bei freier Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit von $v = 130 \text{ km/h} \approx 36 \text{ m/s}$ betragen würde. Man erhält

$$176 * B_1(36) = 176 * \frac{10^5}{36\eta_w} P = 176 * 0,13 = 22,98 \text{ Liter}$$

Für die oben beschriebene Situation eines Stop-&-Go-Zyklus bietet es sich an, die Verbrauchsberechnung in vier Phasen durchzuführen:

- **Phase 1:** Beschleunigungsvorgang mit 2 m/s^2 von 0 auf 10 m/s .
- **Phase 2:** Konstantfahrt mit 10 m/s .
- **Phase 3:** Verzögerungs-/Abbremsvorgang mit -2 m/s^2 von 10 auf 0 m/s .
- **Phase 4:** Haltephase dauert 10 s .

Dieser Vier-Phasen-Zyklus wiederholt sich $\frac{176}{0,1} = 1760$ mal bis zum Stauende. Der Verbrauch kann für jede Phase explizit berechnet werden. Ich möchte zwei Möglichkeiten vorstellen:

1. Möglichkeit: Formelle Lösung durch Integration über die Zeit t

Phase 1: Mit Hilfe der Formel $t_a = \frac{v_0}{a}$ kann die Beschleunigungszeit bis zur erreichten Endgeschwindigkeit v_0 berechnet werden. Für obigen Fall erhält man eine Beschleunigungszeit von

$$t_a = \frac{10 \text{ m/s}}{2 \text{ m/s}^2} = 5 \text{ s.}$$

Die dafür benötigte Beschleunigungsstrecke errechnet sich mit Hilfe der Integration der Geschwindigkeit über die verstrichene Zeit:

$$s_a = \int_0^{t_a} v(t) dt = \int_0^{t_a} at dt = \int_0^5 2t dt = 25 \text{ m}$$

Um auf den absoluten Kraftstoffverbrauch für diese Beschleunigungsstrecke von 25 m zu gelangen, muss auf jeden Fall explizit nach der Zeit integriert werden (vgl. Treiber, 2010, S. 358). In der Gleichung für die zeitliche Verbrauchsrate

$$\dot{B}(v, a) = \frac{dB(v, a)}{dt} = \frac{P}{\eta_w} = \frac{1}{\eta_w} \left(P_0 + mav + (c_r \cos(\alpha) + \sin(\alpha))mgv + \frac{1}{2} c_w \rho A v^3 \right)$$

muss für die Integration über die Beschleunigungszeit t_a berücksichtigt werden, dass sich die Geschwindigkeit nun auch mit der Zeit ändert. In obiger Gleichung für die Verbrauchsrate ist also die Geschwindigkeit durch $v = v(t) = at$ zu ersetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} B_a &= \int_0^{t_a} \dot{B}(v(t), \dot{v}(t)) dt = \int_0^{t_a} \dot{B}(at, a) dt = \\ &= \frac{1}{\eta w} \int_0^{t_a} \left(P_0 + ma^2 t + (c_r \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) mg at + \frac{1}{2} c_w \rho A a^3 t^3 \right) dt = \\ &= \frac{1}{\eta w} \left[P_0 t_a + \frac{1}{2} ma^2 t_a^2 + (c_r \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) mg \frac{1}{2} at_a^2 + \frac{1}{8} c_w \rho A a^3 t_a^4 \right] \end{aligned}$$

Mit den Ausdrücken für die Beschleunigungszeit $t_a = \frac{v_0}{a}$ und für die Beschleunigungsstrecke $s_a = \frac{1}{2} at_a^2$ lässt sich die Formel für den absoluten Verbrauch in der ersten Phase (*Beschleunigungsphase*) zu

$$B_a = \frac{1}{\eta w} \left[P_0 t_a + \frac{1}{2} m v_0^2 + (c_r \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) m g s_a + \frac{1}{4} c_w \rho A v_0^2 s_a \right]$$

vereinfachen. Dabei haben die Terme innerhalb der eckigen Klammern folgende Bedeutung:

- i. $P_0 t_a$ beschreibt die Energie/Arbeit ("Leistung mal Zeit"), die erforderlich ist, um den Mindestleistungsbedarf P_0 abzudecken.
- ii. $\frac{1}{2} m v_0^2$ entspricht der kinetischen Energie des Fahrzeuges, die bei der Beschleunigung gewonnen wird.
- iii. $c_r \cos(\alpha) m g s_a$ ist die durch die Rollreibung "verlorengegangene" Energie ("Kraft mal Weg").
- iv. $\sin(\alpha) m g s_a$ ist die durch die Hangabtriebskraft "verlorengegangene" Energie ("Kraft mal Weg").
- v. $\frac{1}{4} c_w \rho A v_0^2 s_a$ entspricht der Energie/Arbeit, die aufzuwenden ist, um den Luftwiderstand zu überwinden ("Kraft mal Weg"). Sie ist gerade die Hälfte der Energie/Arbeit, die erforderlich wäre, um die Luftwiderstandskraft $F_L = \frac{1}{2} c_w \rho A v_0^2$ bei konstanter Geschwindigkeit v_0 zu überwinden.

Für einen einzigen Beschleunigungsvorgang (*Phase 1*) benötigt man demnach

$$B_a \approx 0,01075 \text{ Liter} \equiv \mathbf{10,75 \text{ ml}}$$

Kraftstoff.

Phase 2: Die Konstantfahrt mit $v_0 = 10 \text{ m/s}$ findet auf einer Strecke der Länge $s_{const} = 100 - 2 * s_a = 100 - 2 * 25 = 50 \text{ m}$ statt, da die Bremsverzögerung betragsmäßig gleich der Beschleunigung ist und daher der Bremsweg gleich dem Beschleunigungsweg ist, also

$$s_b = s_a = 25 \text{ m}$$

Für den Verbrauch bei Konstantfahrt mit $v_0 = 10 \text{ m/s}^2$ zur Bewältigung einer Strecke von 50 m kann wieder die streckenbezogene Verbrauchsrate $\frac{dB}{ds}$ verwendet werden und man erhält

$$B_{const} = \frac{50}{\eta_{wv}} P \approx 0,00400 \text{ Liter} \equiv \mathbf{4 \text{ ml}}.$$

Anmerkung: Natürlich hätte man zur Berechnung des Verbrauchs in der zweiten Phase (*Haltephase*) genauso gut die zeitliche Verbrauchsrate $\frac{dB}{dt}$ verwenden und über die Zeit integrieren können.

$$\begin{aligned} B_{const} &= \int_0^{t_{const}} \dot{B}(v(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\eta_w} \int_0^{t_{const}} \left(P_0 + (c_r \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) mg v_{10} + \frac{1}{2} c_w \rho A v_{10}^3 \right) dt = \\ &= \frac{1}{\eta_w} \left[P_0 + (c_r \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) mg v_{10} + \frac{1}{2} c_w \rho A v_0^3 \right] t_{const} = \\ &\approx 0,00400 \text{ Liter} = \mathbf{4 \text{ ml}} \end{aligned}$$

wobei $t_{const} = 5 \text{ s}$ der Zeit für die Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v_{10} = 10 \text{ m/s}$ entspricht. Wie man sieht, liefern beide Methoden das gleiche Ergebnis!

Phase 3: Beim Abbrems-/Verzögerungsvorgang wird angenommen, dass keinerlei Kraftstoff verbraucht wird (aktivierte *Schubabschaltung*) und der *Grundleistungsbedarf* durch

kontinuierliche Abnahme der *kinetischen Energie* des Fahrzeuges vollständig kompensiert werden kann. Es gilt also

$$B_b = 0 \text{ Liter}$$

Phase 4: In der Haltephase befindet sich das Fahrzeug im Stillstand. Somit fällt lediglich der Grundleistungsbedarf P_0 an, für den der Energie-/Arbeitsaufwand von $P_0 t_s$ erforderlich ist, wobei t_s der im Stillstand verstrichenen Motorlaufzeit entspricht. Mit den Modellannahmen aus **Tabelle 3-4** erhält man die dabei verbrauchte Kraftstoffmenge zu

$$B_s = \frac{1}{\eta_w} P_0 t_s \approx 0,00505 \text{ Liter} \equiv \mathbf{5,05 \text{ ml}}$$

Anmerkung: Auch hinter diesem Ergebnis verbirgt sich eine Integration über die zeitliche Verbrauchsrate $\dot{B}(t)$:

$$B_s = \int_0^{t_s} \dot{B}(t) dt = \frac{1}{\eta_w} P_0 t_s \approx \mathbf{5,05 \text{ ml}}$$

wobei alle geschwindigkeitsabhängigen Terme verschwinden.

Zusammenfassung der Ergebnisse - Gesamtverbrauch innerhalb eines Zyklus:

Insgesamt verbraucht man also während eines Stop-&-Go-Zyklus zwischen zwei Haltephasen im Stau eine Kraftstoffmenge von

$$B_{\text{Zyklus}} = B_a + B_{\text{const}} + B_b + B_s \approx 0,01980 \text{ Liter} \equiv \mathbf{19,8 \text{ ml}}$$

□

2. Möglichkeit: Graphische Näherungslösung mit GeoGebra

Eine weitere elegante Möglichkeit, den Kraftstoffverbrauch für einen Stop-&-Go-Zyklus zu berechnen, besteht darin, die *zeitlichen Verbrauchsrate*n der vier Phasen in einem *GeoGebra*-File darzustellen und den Flächeninhalt zwischen den Graphen und der x-Achse zu berechnen. Dazu teilt man das gesamte Flächenstück am besten in drei Teilflächen (siehe **Abbildung 4-2**):

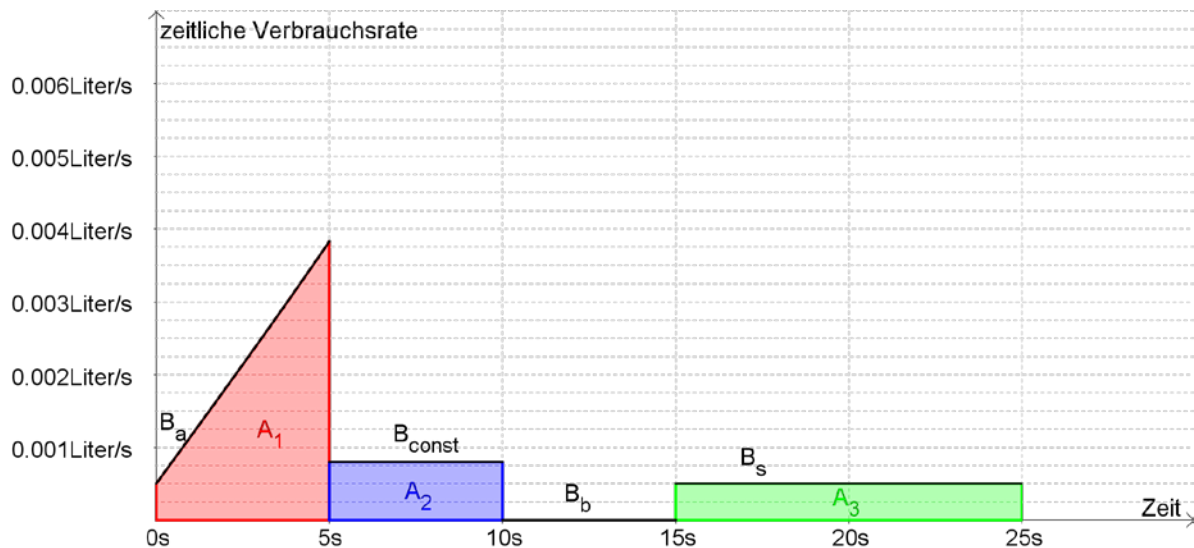


Abbildung 4-2: Zeitliche Verbrauchsrate der vier Phasen eines Stop-&-Go-Zyklus

Bei der Funktion B_a handelt es sich zwar korrekterweise um eine Funktion 3. Grades, sie kann aber hier der Einfachheit halber durch eine lineare Funktion angenähert werden, mit der Begründung, dass die Luftwiderstandskraft für kleine Geschwindigkeiten (hier $v(t) \leq 10 \text{ m/s}$) zu vernachlässigen ist! Nimmt man diesen kleinen Fehler in Kauf, so besteht die Aufgabe nun darin, den Flächeninhalt eines Trapezes und zweier Rechtecke zu berechnen. Die benötigten Längen liest man am besten direkt aus [Abbildung 4-2](#) ab. Mit den Flächenformeln für ein Trapez und zwei Rechtecke erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 B_{\text{Zyklus}} &= A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 + A_3 = \\
 &= \frac{(0,0005 + 0,00385) * 5}{2} + 0,00085 * 5 + 0,0005 * 10 \approx \\
 &\approx 0,01088 + 0,00425 + 0,005 = 0,02013 \text{ Liter} \equiv \mathbf{20,13 \text{ ml}}
 \end{aligned}$$

Der Fehler zur Lösung mittels Integration beträgt lediglich

$$|19,8 - 20,13| = \mathbf{0,33 \text{ ml}}$$

pro Stop-&-Go-Zyklus.

□

Zusammenfassung der Ergebnisse - Gesamtverbrauch in einem 176 km langen Stau

Dividiert man die Länge des Staus (176 km) durch die Länge eines Fahrzykluses (in diesem Beispiel 100 m), so erhält man die gesamte Anzahl der Zyklen zu

$$\frac{176000 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 1760 \text{ Zyklen}$$

und damit für den gesamten Kraftstoffverbrauch (im Stau stehend):

$$B_{ges} = 1760 * B_{Zyklus} \approx 34,85 \text{ Liter}$$

Dieses Ergebnis ist nicht zu unterschätzen, wenn man bedenkt, dass man bei verkehrsarmen Verhältnissen für die gleiche Strecke bei einer Geschwindigkeit von 130 km/h mit $22,98 \text{ Liter}$ auskommt. Im Stau beträgt der Stop-&-Go-verkehrsbedingte Mehrverbrauch deshalb $\left(\frac{34,85}{22,98} - 1\right) * 100 \cong 51,65\%$. Beachtlich!

□

Ich komme nun zur dritten und letzten *Leitfrage*:

Leitfrage 3: "Wie groß ist der staubedingte Mehrverbrauch aller Fahrzeuge?"

Die obige Rechnung hat gezeigt, dass in etwa 88000 Pkw in einem Stau der Länge 176 km Platz finden. Wenn der Verbrauch eines Pkw für diese Strecke $34,85 \text{ Liter}$ beträgt, so beträgt folglich der Gesamtverbrauch aller Pkw $34,85 * 88000 = 3,067 \text{ Mio Liter}$. Absolut gesehen sind das in etwa $3,067 * 10^6 * \left(1 - \frac{1}{1,5165}\right) \approx 1,04 \text{ Mio Liter}$ mehr Kraftstoff, als bei freier Fahrt mit 130 km/h derselben Strecke erforderlich wären! Berücksichtigt man zusätzlich die Zeitverluste, die durch den Verkehrsstau entstehen, so kann man davon ausgehen, dass der daraus resultierende volkswirtschaftliche Schaden beträchtlich ist!

□

D) Zusammenfassung und Ausblick

Staubedingte Stop-&-Go-Zyklen erhöhen den Kraftstoffverbrauch eines Pkw zusehends. Das oben beschriebene Verfahren zur Modellbildung und der Berechnung des Mehrverbrauchs an Kraftstoff in Stausituationen lässt sich natürlich beliebig erweitern und soll bloß eine Grundidee für eine Anwendung in einem realitätsnahen Mathematikunterricht darstellen, die von den Schülern/innen je nach Belieben erweitert werden kann/soll. Weitere interessante Fragestellungen in diesem Zusammenhang könnten z.B. sein:

- **Variation der Parameter:** Wie wirken sich verlängerte "freie-Fahrt"-Phasen auf den absoluten Verbrauch aus? Wäre ein kontinuierliches langsames Rollen (ohne Haltephasen!) verbrauchsgünstiger als ständiges Anfahren und Anhalten?
- **Motor aus!** Zahlt es sich aus, in längeren Haltephasen den Motor abzustellen? Wie ließe sich das An- und Abstellen eines Motors am besten modellieren?
- **Berücksichtigung von Bussen, Lkw und Motorrädern im Stau:** Wie wirkt sich die Berücksichtigung anderer Fahrzeugtypen im Stau auf den gesamten Mehrverbrauch an Kraftstoff aus? Welche Parameter müssen bei der Berechnung abgeändert werden?
- **Kosten-Nutzen-Relationen von Überholmanövern auf Autobahnen und Landstraßen:** Wie groß ist die Zeitersparnis? Auf welche Höhe belaufen sich die "Stundenkosten" für den dafür benötigten Mehrverbrauch an Kraftstoff?
- **Alternatives Fortbewegungsmittel Fahrrad:** Wie hoch ist der Energieaufwand bei Fahrten mit dem Fahrrad? Wie viel betragen die Kilometerkosten bei Fahrten mit dem Fahrrad? Welche Modellannahmen müssen diesbezüglich getroffen werden, um die Kosten mit Hilfe der Verbrauchsformel eines Pkw berechnen zu können?
- **Kein Auto in der "Fastenzeit"!** Wie viel sparen sich AutofahrerInnen, die ihr Auto in der Fastenzeit für 40 Tage stehen lassen?
- **Streckenbezogene Verbrauchsrate eines Zuges:** Wie sieht der Graph für die streckenbezogene Verbrauchsrate eines Zuges aus? Welcher Energieaufwand ist nötig, um einen Güterzug auf 100 km/h zu beschleunigen?
- **Günstig Tanken über der Grenze:** Was versteht man unter Tanktourismus? Lohnt sich eine Fahrt zum Tanken über die Grenze?
- **Kraftstoffverbrauch bei Kreuzungen mit Anhaltepflicht:** In Amerika und Australien gibt es häufig sogenannte *Four-Way-Stop*-Kreuzungen (siehe **Abbildung 4-3**), bei denen man prinzipiell anhalten muss. Wie groß wäre die Ersparnis an Kraftstoff, wenn man diese Stop-Regelungen durch eine Vorrangstraße, welche man ohne Bremsen durchfahren kann, ersetzen würde? (vgl. Treiber, 2010, S. 286)

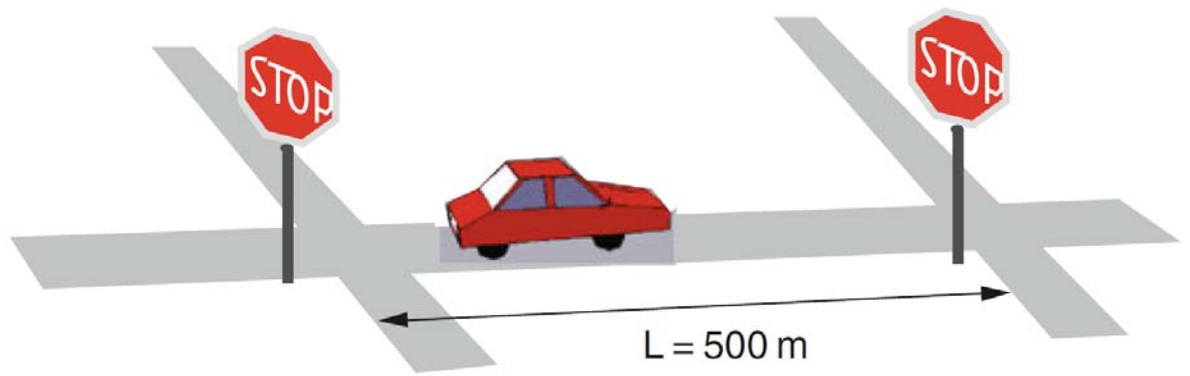


Abbildung 4-3: Four-Way-Kreuzungen (vgl. Treiber, 2010, S. 286)

5. Resümee und Ausblick

Die umfangreiche Kompetenz "Modellbilden" gehört zu den wesentlichen Bestandteilen eines modernen, realitätsnahen Mathematikunterrichts. In der vorliegenden Arbeit werden in verschiedenen Unterrichtseinheiten schrittweise vier Modelle zur Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw vorgestellt. Dabei sind die Modelle in Form von Modellsequenzen entwickelt, bei denen ersehen werden kann, wie aus einem einfachen Grundmodell (*Durchschnittsverbrauch eines Pkw*) schrittweise immer anspruchsvollere, aber auch realistischere Modelle (*Verbrauch bei konstanter Geschwindigkeit* bis hin zu einem vollständigen *Physik-basierten Modell*) entwickelt werden. Der Einsatz der bereitgestellten Lehr- und Lernmaterialien, sowie die Lehrmethoden reichen von fragend-entwickelndem Unterricht bis hin zu Gruppen-, Partner- und Einzelarbeiten. Auch ein fächerübergreifendes Projekt mit dem Lehrfach Physik ist durchaus möglich.

Mein persönliches Ziel, das ich mit dieser Arbeit verfolge, ist es, das Bewusstsein von LehrerInnen und SchülerInnen im Hinblick auf einen umweltfreundlichen und ressourcenschonenden Umgang mit den Energiereserven unserer Erde zu schärfen und dass Mobilität und, im speziellen, das "prickelnde" Gefühl bei Beschleunigungsvorgängen und rasanten Autofahren durchaus erhöhte Kosten mit sich tragen können! Hinter dem Wissen über Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch eines Pkw verbirgt sich die Möglichkeit, diese Kosten zu quantifizieren und zu minimieren.

Die vorgestellten Aufgabenstellungen sind nur wenige Möglichkeiten von vielen, wie man sich dem Thema "Kraftstoffverbrauch eines Pkw" im Mathematikunterricht annehmen kann. Die Untersuchung von Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch (**Kapitel 3**) sollte vor allen Dingen bei der Ideenfindung für weitere Anwendungen einer *Physik-basierten Modellrechnung* dienen. Gerade hinter der offenen Aufgabenstellung, ob sich das "Tanken über der Grenze" auszahle, verbergen sich, bei genauerer Betrachtung, unzählige zu treffende Modellannahmen, damit das Modell den realen Gegebenheiten möglichst genau entsprechen kann. Setzt man zudem die Idee fort und bildet man den Quotienten der

Begriffe *Wegstrecke* und *Bereitstellungszeit*²², so stößt man schnell auf weitere Definitionen, wie etwa auf die der *verallgemeinerten Durchschnittsgeschwindigkeit* (vgl. Herget, 1992, S. 38), welche wiederum stark vom Kraftstoffverbrauch abhängt. Überdies hinaus, können mit dem vorgestellten *Physik-basierten Modell* für den Kraftstoffverbrauch die Kosten für Fahrten mit dem Pkw mit denen anderer Verkehrsmittel verglichen und somit leichter Entscheidungen für die Wahl des Verkehrsmittels getroffen werden. Insbesondere stellt z.B. die Fragestellung "*Auto, Bus, Bahn oder doch lieber Fahrrad?*" - welche im Alltag von Jugendlichen und Erwachsenen durchaus eine Rolle spielt - einen weiteren, interessanten Ausgangspunkt zum Thema Kosten-Nutzen-Relationen im Schulunterricht dar.

Die nächste Fahrt in die Arbeit, in den Urlaub oder in das nahegelegene Einkaufszentrum kommt bestimmt. Und wer weiß, vielleicht überlegt sich ja die eine oder andere Person das nächste Mal, ob er/sie in das Auto steigt oder doch lieber den Bus, die Bahn oder vielleicht sogar das Fahrrad nimmt...

²² Der Autor, Jürgen Maaß, des Artikels "Wenn der Porsche schleicht..." (siehe Herget, 1992, S. 38) versteht unter dem Begriff *Bereitstellungszeit* jene Zeit, welche zusätzlich erforderlich ist, um ein Fahrzeug zu kaufen, zu warten, etc.

6. Epilog

Die "Cafe-Sonntag"-Glosse von Karl Ferdinand Kratzl²³:

Eigentlich bin ich ein autofahrender Autogegner! Mein Wagen, meine Limousine, meine Karre, meine Rennsemmel muss mich in unmittelbarer Nähe zu allen meinen Aktivitäten bringen. Aber flott! Bevor ich einsteig, steck ich mir einen Pfefferoni in den Popo und dann Vollgas. Ich bin der Wilde: "I was net wo i hinvor, aber davür bin i gschwinder dort." Da freut sich der Größenwahn. Ich muss ja mobil sein!!! Ich krieg ja net überall alles, was ich brauch!

In Österreich werden jeden Tag auf der Straße zwei Menschen umgebracht. Wollen Sie noch ein Brioche-Kipferl zum Eintunken? 365 Tage pro Jahr. Und da sind jene, die laut WHO infolge der Abgase sterben, noch gar nicht eingerechnet. Lasst Euch das Frühstück gut schmecken! Jaja: Die Schachtelhalme, die Gänseblümchen und die Apfelbäume, ja die ganzen Pflanzen haben es gut. Die brauchen nur Sonnenschein, Regen und einen passenden Boden. Ich brauch mehr! Und zwar dringend! Wo krieg ich das? Da muss ich hinfahren! So einfach ist das.

Dann bin ich am Ziel. Was ist dann? Dann muss ich aussteigen und zu Fuß weitergehen. In einem langsamen Zwei-Viertel-Takt. Schritt für Schritt bin ich ja viel zu langsam. Ich dürfte ja in der Stadt mit 50 Stundenkilometer gehen. Aber da sieht man nix. Da fetzt alles nur so vorbei. Jetzt, ganz langsam verfolge ich die schwarzen Asphaltlinien am Trottoir, ab und zu wachsen Kräuter wie Hirtentäschel und Löwenzahn aus dem Zusammentreffen von Hauswand und Gehsteig. Ein Spinnennetz vor einem Kellerfenster. Mittendrin eine fette, resche Kreuzspinnerin. Oben aus einem Fenster höre ich Klavierspielen. Eine Radlfahrerin sperrt gerade ihr Fahrradschloss ab, richtet sich auf und schenkt mir ihren heiteren Blick.

Einen Vorteil aber hat das Autofahren: Im Gegensatz zu allen anderen Menschen dürfen wir Autofahrer unsere Umgebung straffrei verlärmern, verunreinigen und die öffentliche Sicherheit gefährden. So a richtige Drecksau sein, ist für alle Gutmenschen recht erfrischend. Es ist verboten, zu laut zu sein! Es ist verboten, krebserregende Substanzen zu versprühen! Wir Autofahrer verkürzen das Leben unserer Mitmenschen um zwölf Jahre durch unsere Auspufferei! Dafür sollten uns die Krankenkassen und Pensionsversicherungsanstalten wenigstens, als kleines Dankeschön, unsere Autos gratis zur Verfügung stellen!

²³ ausgestrahlt am Ö1-"Cafe-Sonntag" zum Thema "Alles verkehrt!" mit Oliver Baier und Hermann Knoflacher am 15.5.2014, auch im Internet abrufbar unter <http://oe1.orf.at/artikel/373959>.

Wer befreit uns von der Autofahrsucht? Ich nicht! Das Übel kommt ja von der Werbung. Gezeigt wird eine leere Landstraße in wunderschöner Umgebung, auf der ein einziges Auto herumsaust. Würde die Realität des Verkehrs im Stau gezeigt werden, wäre ja kein Mensch so dumm, ein Auto zu kaufen.

7. Literaturverzeichnis

- [1.] Blum, W., König, G., Schwehr, S., (1997): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. Band 4. Hildesheim: Franzbecker-Verlag.
- [2.] Dorner, C., Wiedemann, J. (Hrsg.), (2004): Effizienzbestimmung von Fahrweisen und Fahrerassistenz zur Reduzierung des Kraftstoffverbrauchs unter Nutzung technischer Information. Schriftenreihe des Instituts für Verbrennungsmotoren und Kraftfahrwesen der Universität Stuttgart. Band 24. Renningen: Expert-Verlag.
- [3.] Greefrath, (2006): Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben". Köln: Aulis Verlag Deubner.
- [4.] Henn, W., Kirchgraber, U. (Hrsg.), (1994): Auto und Verkehr. Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht. Bericht No. 94-04, ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich. Karlsruhe.
- [5.] Herget, W. (Hrsg.), (1992): Mathematik und Verkehr. Handlungsorientierter Mathematikunterricht. Anregungen und Unterrichtsmaterialien quer durch die Sekundarstufen I und II. MUED-Schriftenreihe Unterrichtsprojekte. Appelhülsen/Mülheim: Verlag an der Ruhr GmbH.
- [6.] Reif, K. (Hrsg.), (2011): Bosch Grundlagen Fahrzeug- und Motorentechnik. Konventioneller Antrieb, Hybridantriebe, Bremsen, Elektronik. Bosch Fachinformation Automobil. Wiesbaden: Springer Verlag (Vieweg + Teubner), 1. Auflage.
- [7.] Pötscher, F., Bundesministerium für Land- und Forstwirtschaft, Umwelt und Wasserwirtschaft (Hrsg.), (2013): CO₂-Monitoring Pkw 2013. Zusammenfassung der Daten der Neuzulassungen von Pkw der Republik Österreich gemäß Entscheidung Nr. 1753/2000/EG für das Berichtsjahr 2012. Wien.
- [8.] Tipler, P., A., Gerlich, D., Jerke, G. (Hrsg.), (1994): Physik. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.
- [9.] Treiber, M., Kesting, A., (2010): Verkehrsdynamik und -simulation. Daten, Modelle und Anwendungen der Verkehrsflussdynamik. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Weitere nützliche Materialien aus dem WWW:

- Tschöke, H., Heinze, H. E., (2001): Einige unkonventionelle Betrachtungen zum Kraftstoffverbrauch von Pkw. Magdeburger Wissenschaftsjournal 1-2. [Online im Internet: <http://www.uni-magdeburg.de/MWJ/MWJ2001/tschoeke.pdf>].
- *Ohne Autor.* 2. Kapitel - Methoden der Verbrauchsrechnung. [Online im Internet: http://www.fuse-network.com/espace/fas_kap_2.pdf].
- Müller, R.: Eine Formel in vielen Kontexten. Fermi-Probleme zum Strömungswiderstand. [Online im Internet: <https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/ifdn-physik/leistung.pdf>]
- DAT Deutsche Automobil Treuhand GmbH (Hrsg.), (2015): Leitfaden über den Kraftstoffverbrauch, die CO₂-Emissionen und den Stromverbrauch aller neuen Personenkraftwagenmodelle, die in Deutschland zum Verkauf angeboten werden. [Online im Internet: <http://www.dat.de/uploads/media/LeitfadenCO2.pdf?L=0>]

8. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1-1: Tanksäule aus den 1970er Jahren	4
Abbildung 1-2: Modellbildungsprozess.....	8
Abbildung 1-3: Artikel in der "Krone" zum Thema "Luft-Hunderter" auf der A1	13
Abbildung 2-1: Weg-Verbrauchs-Diagramm dargestellt mit stückweisen linearen Funktionen	22
Abbildung 2-2: Weg-Verbrauchs-Diagramm mit eingezeichneter Regressionsgerade	23
Abbildung 2-3: "Teilverbrauchs"-Diagramm zur Ermittlung des Maximal- und Minimalverbrauchs	24
Abbildung 2-4: Verbrauchsdiagramm 1. - 6. Gang eines Golf 1,4 TSI mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur.....	28
Abbildung 2-5: Vereinfachtes Kräftediagramm eines Pkw	29
Abbildung 2-6: Erreichbare Höchstgeschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit von der Motorleistung.....	32
Abbildung 2-7: Linearisierte Messwerte mit eingetragener Regressionsgeraden	37
Abbildung 2-8: Wärmeflussdiagramm eines herkömmlichen Verbrennungsmotors.....	40
Abbildung 2-9: Linearisierte Messwerte mit eingezeichneter Regressionsgeraden	45
Abbildung 2-10: Interpolationsgraphen (rot: aus Modell II unter Berücksichtigung von Luftreibung; schwarz und grün: aus Modell III unter Berücksichtigung von Luftreibung und Motorwirkungsgrad)	52
Abbildung 2-11: Übersichtsdiagramm zur Veranschaulichung des instantanen Kraftstoffverbrauchs (vgl. Treiber, 2010, S. 277)	58
Abbildung 2-12: <i>Rumpler Tropfenwagen</i> im Technikmuseum Berlin	60
Abbildung 2-13: Kräftediagramm eines Klotzes auf einer schiefen Ebene.....	61
Abbildung 2-14: Verkehrsschild	62
Abbildung 2-15: Rechtwinkeliges Dreieck.....	62
Abbildung 2-16: Begriffsbildung "Steigung" und "Steigungswinkel"	63
Abbildung 2-17: Sir Isaac Newton (1643 - 1727) nach einem Kupferstich (vgl. Tipler, 1994, S. 71).....	64
Abbildung 2-18: Schematische Darstellung eines abrollenden Reifens	65
Abbildung 2-19: Rauchentwicklung durch Reibungswärme	68
Abbildung 2-20: Ferrari Enzo.....	70

Abbildung 2-22: Kräftediagramm eines Pkw auf einer schiefen Ebene.....	73
Abbildung 2-23: Bauarbeiten in Chemnitz 1970	78
Abbildung 3-1: Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	86
Abbildung 3-2: Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	88
Abbildung 3-3: Kraftstoffverbrauch für Passstraßen und Autobahnen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	89
Abbildung 3-4: Kraftstoffverbrauch für Passstraßen und Autobahnen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	91
Abbildung 3-5: Kraftstoffverbrauch für Passstraßen und Autobahnen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	91
Abbildung 4-1: Sicherheitsabstand zweier Pkw (vgl. Blum, 1997, S. 72)	96
Abbildung 4-2: Zeitliche Verbrauchsraten der vier Phasen eines Stop-&-Go-Zyklus	105
Abbildung 4-3: Four-Way-Kreuzungen (vgl. Treiber, 2010, S. 286)	108

9. Tabellenverzeichnis

Tabelle 2-1: Entnommene Daten aus der Zulassungsbescheinigung des Familien-Pkw	19
Tabelle 2-2: Einträge aus dem Fahrtenbuch für das Auto <i>Nissan Micra</i>	20
Tabelle 2-3: Berechnung des Durchschnittsverbrauchs mit Hilfe einer Schlussrechnung	21
Tabelle 2-4: Fahrzeugtypen aufsteigend sortiert nach ihrer Leistung und ihrer Höchstgeschwindigkeit.....	31
Tabelle 2-5: Wertepaare des 5. Gangs (orange Kurve)	36
Tabelle 2-6: Linearisierte Wertepaare des 5. Gangs (orange Kurve).....	36
Tabelle 2-7: Verbrauch bei 40 km/h in den jeweiligen Gängen.....	38
Tabelle 2-8: Wertepaare des 5. Gangs (orange Kurve)	42
Tabelle 2-9: Kombinationsmöglichkeiten, drei aus sieben Kugeln auszuwählen	43
Tabelle 2-10: Linearisierte Wertepaare des 5. Gangs	44
Tabelle 2-11: Wertepaare des 5. Gangs	49
Tabelle 2-12: Zeitersparnis für bestimmte Geschwindigkeiten	55
Tabelle 2-13: Zeitersparnis, Kraftstoff-Mehrverbrauch und Stundenkosten für die Zeitersparnis.....	55
Tabelle 2-14: Luftwiderstandsbeiwerte verschiedener Pkw-Typen	59
Tabelle 2-15: c_r -Werte von Wälzkörperpaarungen	67
Tabelle 3-1: Mehrverbrauch durch Klimaanlage in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit...	84
Tabelle 3-2: Modellannahmen 1	84
Tabelle 3-3: Mehrverbrauch durch Dach-Gepäcksträger in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit	84
Tabelle 3-4: Modellannahmen 2	87

10. Anhang

Auf den nachfolgenden Seiten finden sich Kopiervorlagen, die im Unterricht verwendet werden können. Für weitere elektronische Unterlagen (Tabellen, *GeoGebra*-Dateien, etc.) bitte um Kontaktaufnahme mit dem Autor: christof.schoeffl@gmx.at

Mein persönliches Tank-Fahrtenbuch

Name: _____

Name des Autos:	
Baujahr	
Beginn der Aufzeichnungen:	
Ende der Aufzeichnungen:	

Motorleistung:	
Hubraum:	
Eigengewicht:	
Antriebsart:	

theoretischer Kraftstoffverbrauch:	
berechneter Durchschnittsverbrauch:	

[illegible]

Arbeitsblatt 1: Bestimmung des Durchschnittsverbrauchs eines Pkw

Das Ziel dieses Arbeitsblattes besteht darin, den Durchschnittsverbrauch deines Pkw (oder deiner Eltern oder Verwandten) zu berechnen. Das Tank-Fahrtenbuch soll dir dabei helfen, Informationen zu erhalten, die du bei der Berechnung verwenden kannst. Protokolliere alle Arbeitsschritte in dein Heft! Viel Erfolg beim Ausführen der Arbeitsaufträge!

Arbeitsaufträge:

- 1) Frage deine Eltern und erkundige dich über technische Daten (Baujahr, Motorleistung, Hubraum, etc.) in der Zulassungsbescheinigung deines ausgewählten Autos! Trage die Daten in dein Tank-Fahrtenbuch ein!
- 2) Notiere (mindestens 5!) Tankfüllungen in Folge (Datum, Gesamtkilometer, Tageskilometer, Liter, Preis/Liter, Gesamtpreis, Tankstelle)! Falls zusätzliche Bereitstellungskosten anfallen (Vignette, Überprüfungs-"Pickerl", Waschanlage, Reparaturen, Anschaffungen, etc.), kannst du diese in der Spalte *sonstige Bereitstellungskosten* vermerken.
- 3) Trage die Messwerte aus deinem *Tank-Fahrtenbuch* in ein Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. *Excel*) ein. Lege dazu passende Spalten an!
- 4) Wie viele Kilometer werden mit dem Auto im Durchschnitt täglich/monatlich/jährlich mit dem Auto gefahren?
- 5) Wie viele Liter Kraftstoff werden dafür im Durchschnitt täglich/monatlich/jährlich benötigt?
- 6) Ermittle den Durchschnittsverbrauch deines gewählten Autos auf zwei verschiedene Arten (einmal mit Hilfe einer geeigneten Schlussrechnung und einmal mit Hilfe einer Regressionsgeraden) und stelle eine Formel für den Kraftstoffverbrauch in der Form $B(s) = a * s$ auf!
- 7) Stelle deine Messwerte graphisch in einem "Teilverbrauchs-Diagramm" dar, indem du die Spalte *Gesamtkilometer* (Spalte B) als x-Achse und die *Verbrauchsspalte* (Spalte G) als y-Achse wählst! Kannst du daraus Werte für den Maximal- bzw. Minimalverbrauch deines gewählten Autos ablesen?
- 8) Wie schneidet dein gewähltes Auto bzgl. des Kraftstoffverbrauchs ab? Vergleiche dazu deine Ergebnisse mit denen eines/er Durchschnittsösterreichers/in, der/die laut einer Statistik des Verkehrsclubs Österreich (kurz VCÖ) täglich 36 km mit dem Auto fährt und dabei täglich rund 2,5 Liter Treibstoff verbraucht (vgl. Die Presse, 02/2012)!
- 9) Vergleiche deine Ergebnisse mit denen deiner MitschülerInnen! Wer benutzt sein/ihr Auto am wenigsten? Welche Autos lassen sich am "spritärmsten" fahren? Wie hat sich der Preis für Diesel/Super Benzin in den vergangenen Monaten entwickelt? Was sind die häufigsten Reparaturkosten eines Autos? Diskutiere deine Ergebnisse!

Arbeitsblatt 2: Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw bei konstanter Geschwindigkeit

Das Ziel dieses Arbeitsblattes besteht darin, den Kraftstoffverbrauch eines Pkw bei konstanter Geschwindigkeit zu berechnen. **Abbildung 1** zeigt das Verbrauchsdiagramm eines *Golf 1,4 TSI* mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur an¹. Darin ist der Verbrauch in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit aufgetragen. Führe folgende Arbeitsaufträge aus und protokolliere die Ergebnisse in dein Heft!

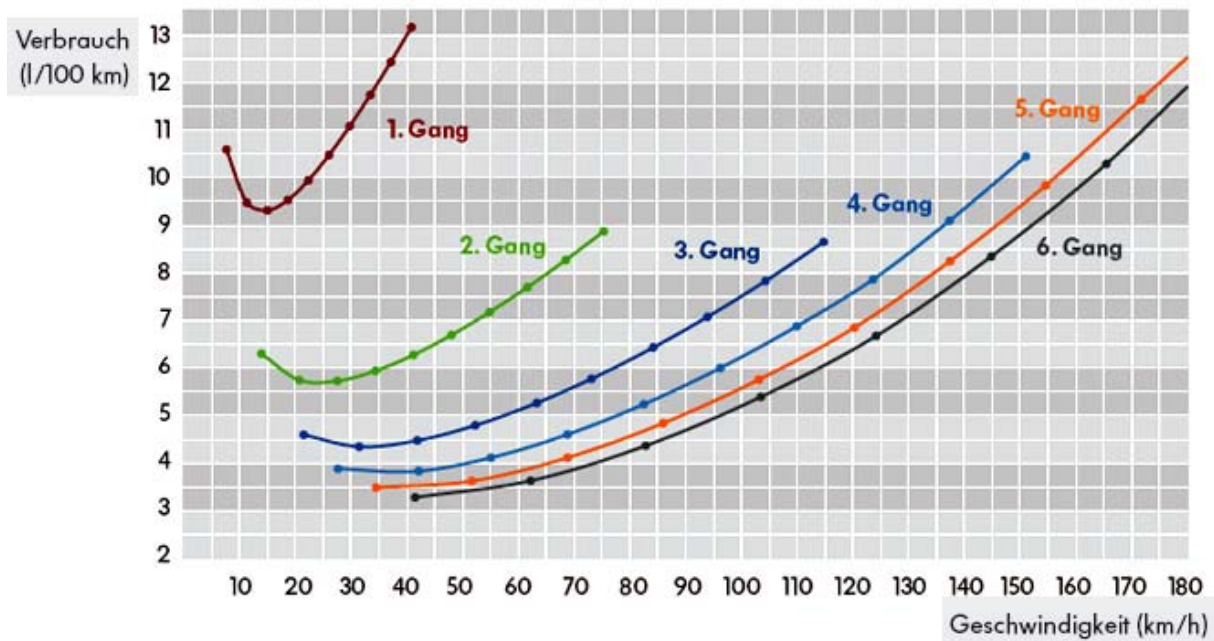


Abbildung 1: Verbrauchsdiagramm 1. - 6. Gang eines Golf 1,4 TSI mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur

Arbeitsaufträge:

- 1) Warum sind die Geschwindigkeitsbereiche des *Golf* in den jeweiligen Gängen beschränkt? Was ist die Höchstgeschwindigkeit, die mit dem ersten Gang erreicht werden kann? Was ist die Minimalgeschwindigkeit, die mit dem sechsten Gang gefahren werden kann?
- 2) Ein Autofahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 40 \text{ km/h}$ auf offener Landstraße. In welchem Gang verbraucht er den meisten / den wenigsten Kraftstoff?
- 3) **Messwertanalyse 1:** Entscheide dich für einen Gang und wähle die entsprechende "Verbrauchskurve" aus der **Abbildung 1** aus, für welche du eine Messwertanalyse mit Hilfe des Ansatzes $B(v) = a + bv^2$ und einer geeigneten Linearisierung der Messwerte durchführen möchtest. Zeichne ein Diagramm deiner linearisierten Messwerte und füge eine Regressionsgerade hinzu. Schätze anschließend Werte für die Parameter a und b ab.!
- 4) Wie realistisch ist dieses Modell für die Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw?

¹ <http://www.motor-talk.de/bilder/10l-verbrauch-beim-einfahren-dsg-160ps-zu-hoch-g8428112/verbrauchsdiagramm-i203063293.html>

Arbeitsblatt 3: Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw bei konstanter Geschwindigkeit

Das Ziel dieses Arbeitsblattes besteht darin, den Kraftstoffverbrauch eines Pkw bei konstanter Geschwindigkeit zu berechnen. **Abbildung 1** zeigt das Verbrauchsdiagramm eines *Golf 1,4 TSI* mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur an¹. Darin ist der Verbrauch in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit aufgetragen. Führe folgende Arbeitsaufträge aus und protokolliere die Ergebnisse in dein Heft!

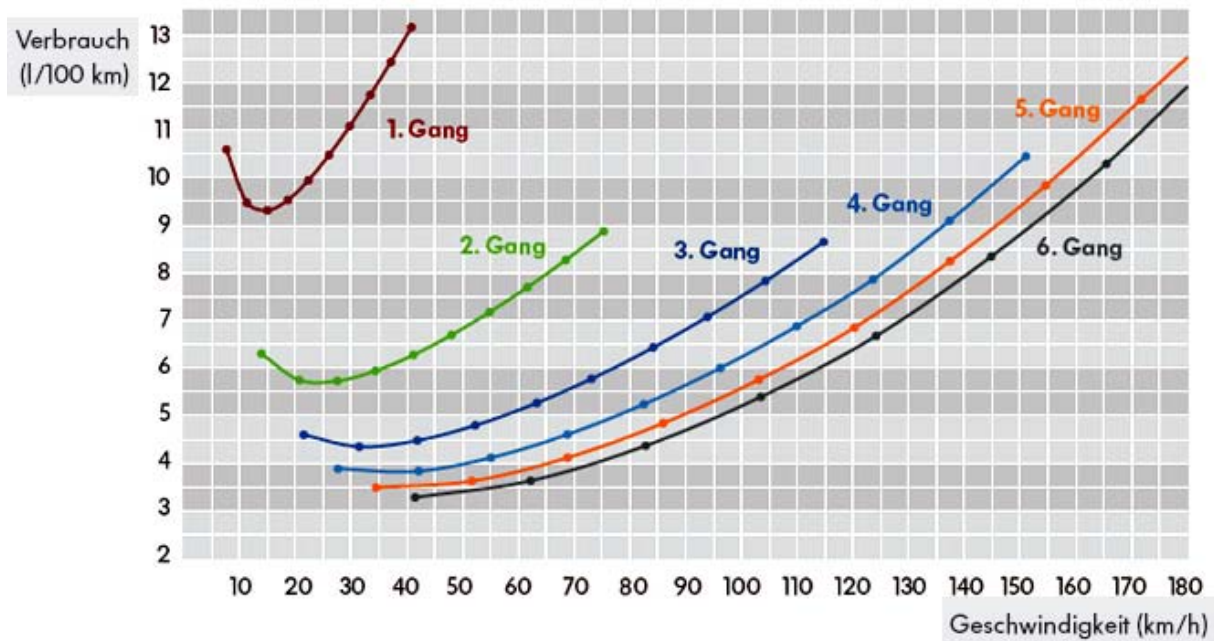


Abbildung 1: Verbrauchsdiagramm 1. - 6. Gang eines Golf 1,4 TSI mit 90 kW bei 20 Grad Außentemperatur

Arbeitsaufträge:

- 1) Warum sind die Geschwindigkeitsbereiche des *Golf* in den jeweiligen Gängen beschränkt? Was ist die Höchstgeschwindigkeit, die mit dem ersten Gang erreicht werden kann? Was ist die Minimalgeschwindigkeit, die mit dem sechsten Gang gefahren werden kann?
- 2) Ein Autofahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 40 \text{ km/h}$ auf offener Landstraße. In welchem Gang verbraucht er den meisten / den wenigsten Kraftstoff?
- 3) **Messwertanalyse 2:** Entscheide dich für einen Gang und wähle die entsprechende "Verbrauchskurve" aus der **Abbildung 1** aus, für welche du eine Messwertanalyse mit Hilfe des Ansatzes $B(v) = c + dv + ev^2$ auf drei verschiedene Arten durchführen möchtest:
 - a. Methode 1: Lösen linearer Gleichungssysteme
 - b. Methode 2: Lösen durch Linearisierung
 - c. Methode 3: Methode der kleinsten Fehlerquadrate
- 4) Wie realistisch ist dieses Modell für die Berechnung des Kraftstoffverbrauchs eines Pkw?

¹ <http://www.motor-talk.de/bilder/10l-verbrauch-beim-einfahren-dsg-160ps-zu-hoch-g8428112/verbrauchsdiagramm-i203063293.html>

Arbeitsblatt 4: Untersuchung von Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch eines Pkw

Das Ziel dieses Arbeitsblattes besteht darin, Einflussfaktoren auf den Kraftstoffverbrauch eines Pkw zu untersuchen und den Wahrheitsgehalt gängiger Meinungen von Autofahrern/innen zu überprüfen. Diskutiere in Partner- und Gruppenarbeiten den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen, sowohl qualitativ, als auch quantitativ mit Hilfe der Verbrauchsformel $B_{100} = \frac{10^5}{\eta_{wv}} P$ und geeigneten Parameterwerten! Veranschauliche deine Ergebnisse mit Wertetabellen und Diagrammen! Zur Vereinfachung dürfen ein konstanter Wirkungsgrad η und Fahrten bei konstanter Geschwindigkeit, d.h. $v(t) = \text{const} \Rightarrow a(t) = 0$, angenommen werden!

Aussage 1: *"Der Mehrverbrauch durch eine Klimaanlage wirkt sich vor allen Dingen in der Stadt aus."*

Aussage 2: *"Der Mehrverbrauch durch einen Dach-Gepäcksträger wirkt sich vor allen Dingen in der Stadt aus."*

Aussage 3: *"Auf Autobahnen kann man mehr als 2% Kraftstoff sparen, wenn man nicht volltankt, sondern den Tank nur bis zur Hälfte füllt und dafür immer wieder auftankt."*

Aussage 4: *"Tempo-30-Zonen reduzieren den Kraftstoffverbrauch im Stadtgebiet."*

Aussage 5: *"Luft-Hunderter statt Tempo 130 reduzieren den Kraftstoffverbrauch auf Autobahnen."*

Aussage 6 - Kraftstoffverbrauch Autobahn vs. Passstraße: *"Bei einer Autofahrt mit konstanter Geschwindigkeit von 130 km/h auf der Autobahn verbraucht man im Mittel weniger Kraftstoff als auf einer Passstraße mit 5% Steigung, die man im Aufstieg mit 50 km/h sowie bei der Abfahrt mit Motorbremse fährt."*

Arbeitsblatt 5: Kraftstoffverbrauch bei variabler Geschwindigkeit in Stausituationen

Das Ziel dieses Arbeitsblattes besteht darin, ein Gefühl für das Schätzen von Größen zu erlangen und die Verbrauchsformel $B_{100} = \frac{10^5}{\eta_{wv}} P$ auf Stausituationen anzuwenden.

Offene Aufgabenstellung: Wikipedia (2014) zu Folge verzeichnet das *Guinness-Buch* der Rekorde den längsten Stau der Welt zwischen Paris und Lyon (Frankreich) im Jahre 1980 mit einer Gesamtlänge von 176 Kilometern! Wie viele Menschen befanden sich dabei vermutlich im Stau? Um wie viel mehr Kraftstoff wurde dabei pro Fahrzeug bzw. gesamt verbraucht?

Versuche mit Hilfe dieser Informationen und geeigneten Abschätzungen Antworten auf folgende Fragen zu finden:

- a) Wie lange ist der Stau?
- b) Wie groß ist die Anzahl der Fahrspuren auf der Autobahn?
- c) Welche Fahrzeugtypen stehen im Stau und wie groß sind deren relative Anteile?
- d) Wie groß ist die durchschnittliche Länge eines dieser Fahrzeuge?
- e) Wie groß ist der mittlere Sicherheitsabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Fahrzeugen?
- f) Wie viele Autos passen auf eine 176 km lange Straße?
- g) Wie viele Autos passen auf eine 176 km lange, dreispurige Autobahn?
- h) Wie viele Menschen befinden sich durchschnittlich in einem Fahrzeug?
- i) Wie groß ist der Mehrverbrauch im Stop-&-Go-Verkehr gegenüber dem Fließverkehr mit konstanter Geschwindigkeit? Teile dazu einen Stop-&-Go-Zyklus in vier Phasen (*Beschleunigungsphase, Phase mit konstanter Geschwindigkeit, Verzögerungsphase, Haltephase*) und berechne für jede Phase den Kraftstoffverbrauch!
- j) Wie groß ist der staubedingte Mehrverbrauch aller Fahrzeuge?

Notiere alle Rechnungen und Ergebnisse in dein Heft!